

Q
56
S7

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-SIXIÈME 1952

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES,
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

PREMIER ET DEUXIÈME FASCICULES

25 JUIN 1952



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique
et du Gouvernement*

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1952

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 60 frs

TABLE DE MATIÈRES

Manuscrits reçus le 31 janvier 1952.

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques

	PAGES
Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre, par M. V. Thébault	5
Sur une généralisation à n variables des polynômes d'Abel-Laguerre, par M. P. Delerue	13
Intégrales et calcul symbolique, par M. L. Poli	21
Extension d'un théorème de Poincaré aux systèmes d'équations récurro- différentielles de forme normale dépendant d'un paramètre variable, par M. R. H. Germa y	27
Congruences formed by the tangents to a surface, by S. Krishna	31

Session du 30 avril 1952, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques

A propos du tranchet d'Archimède, par M. V. Thébault	41
Un exemple simple de produit indéfini de facteurs primaires dont les zéros sont les racines d'équations récurrentes, par M. R. H. Germa y	49
A Note on Meijer transform, by J. P. Jaiswal	55
Sur une propriété de similitude des configurations moyennes de mobiles indéformables, par M. F. Buckens	61
Au sujet du coefficient de glissement introduit dans l'étude de l'usure des profils actifs des dents des engrenages cylindriques à dents droites, par M. C. Demars	70

DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques

Spectre infra-rouge à grande dispersion de CH_2 -CHD, I, par MM. C. Courtouy et M. de Hemptinne	82
---	----

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne
faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg 70 fr.
dans les autres pays 120 fr.

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre

PAR

VICTOR THEBAULT, TENNIE (France)

NOTATIONS. — Nous considérerons, d'abord, un triangle $T \equiv ABC$, inscrit à un cercle (O) , ayant pour hauteurs AA' , BB' , CC' et pour angle de BROCARD θ , dont les côtés BC , CA , AB et la surface ont pour mesures a , b , c et S ; ensuite, un tétraèdre $T \equiv ABCD$, inscrit à une sphère (O) , dont les arêtes BC , DA , CA , DB , AB , DC , les aires des faces BCD , CDA , DAB ; ABC ont pour mesures a , a' , b , b' , c , c' , A , B , C , D .

1. — Considérons un cercle (ω) , de rayon σ , pour lequel les puissances des sommets A , B , C d'un triangle T de son plan aient les formes k^2l^2 , k^2m^2 , k^2n^2 , l^2 , m^2 , n^2 ayant des valeurs données et k étant un coefficient arbitraire.

THÉORÈME. — *Le pôle trilinéaire de l'axe radical des cercles (O) , (ω) se confond avec le centre radical Q des cercles (O_a) , (O_b) , (O_c) qui passent par B et C , C et A , A et B et qui coupent orthogonalement les cercles (A, kl) , (B, km) , (C, kn) .*

En effet, soient Δ l'axe radical des cercles (O) , (ω) , α , β , γ les projections orthogonales des sommets A , B , C de T sur Δ ; M , N , P les intersections de cette droite et des droites BC , CA , AB . On a, en grandeur et en signe,

$$\overline{A\omega}^2 - \sigma^2 = k^2l^2 = 2 O\omega \cdot A\alpha$$

$$\overline{B\omega}^2 - \sigma^2 = k^2m^2 = 2 O\omega \cdot B\beta$$

$$\overline{C\omega}^2 - \sigma^2 = k^2n^2 = 2 O\omega \cdot C\gamma ;$$

d'autre part,

$$MB : MC = M\beta : M\gamma = m^2 : n^2,$$

de sorte que le point M et, par analogie, les points N, P restent fixes lorsque k varie. Par suite, le lieu du centre ω du cercle (ω) , lorsque k varie, est la droite Δ' menée du centre du cercle (O) perpendiculairement à la droite Δ_e de coordonnées barycentriques l^2, m^2, n^2 , par rapport au triangle T.

Les coordonnées barycentriques du pôle trilinéaire P de la droite Δ , par rapport à T, sont donc inversement proportionnelles à l^2, m^2, n^2 , soit $\frac{1}{l^2}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}$.

D'autre part, l'axe radical des cercles $(O_a), (O)$ est la droite BC et les puissances du sommet A pour ces deux cercles sont $k^2 l^2$ et O, On a donc, en grandeur et en signe,

$$k^2 l^2 = 2 OO_a \cdot AA' \text{ ou } OO_a = \frac{k^2 l^2}{2AA'} = - \frac{k^2 l^2 \cdot a}{4S},$$

et

$$OO_a : OO_b : OO_c = l^2 \cdot a : m^2 \cdot b : n^2 \cdot c.$$

Dès lors, le triangle $O_a O_b O_c$ est homothétique au triangle podaire $Q_a Q_b Q_c$, dans le triangle T, du point Q de coordonnées normales $l^2 \cdot a, m^2 \cdot b, n^2 \cdot c$ et le théorème résulte de ce que l'axe radical des cercles $(O_b), (O_c)$ coïncide avec la perpendiculaire abaissée du point A de ces cercles sur la droite $O_b O_c$ et, par suite, sur la droite $Q_b Q_c$.

COROLLAIRE. — Les puissances des sommets A, B, C du triangle T par rapport aux cercles $(O_a), (O_b), (O_c)$ sont des quantités inversement proportionnelles aux aires des triangles QBC, QCA, QAB.

Cette propriété qui résulte immédiatement du théorème précédent généralise une proposition due à J. NEUBERG relative à trois cercles concourants $(O_a), (O_b), (O_c)$ et résolue par le calcul (1).

CAS PARTICULIER. — Si on prolonge les côtés AB, AC de T de telle sorte que

$$BD = \frac{b^2}{c}, \quad CE = \frac{c^2}{b},$$

(1) M. 1911-160; question 1793.

les points B, C, D, E sont sur un même cercle (O_a), car

$$n^2 = AB \cdot AD = AC \cdot AE = c^2 + b^2,$$

et on obtient de même deux cercles (O_b), (O_c) déterminés par les égalités

$$l^2 = BC \cdot BF = BA \cdot BL = a^2 + c^2,$$

$$m^2 = CA \cdot CM = CB \cdot CN = b^2 + a^2.$$

THÉORÈME. — *Dans un triangle T, le pôle trilinéaire de l'axe radical du cercle (O) et du cercle (ω) pour lequel les puissances des sommets A, B, C sont proportionnelles aux quantités $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$, $a^2 + b^2$, le centre radical des cercles (O_a), (O_b), (O_c) correspondant, se confondent avec l'inverse normal du centre de l'ellipse de BROCARD.*

D'après le théorème précédent, les points en cause ayant pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{b^2 + c^2}$, $\frac{1}{c^2 + a^2}$, $\frac{1}{a^2 + b^2}$, se confondent, sur l'hyperbole de KIEPERT, avec l'inverse normal du milieu de la distance des points de BROCARD (1).

N. B. — Ces points coïncident aussi avec le réciproque du barycentre des carrés des côtés de T, c'est-à-dire, avec celui du complémentaire du point de LEMOINE.

NOTES. 1. Les cercles (O_a), (O_b), (O_c) passant par B et C, C et A, A et B, pour lesquels les puissances des sommets A, B, C de T sont proportionnelles aux quantités $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$, $a^2 + b^2$, possèdent une autre propriété intéressante.

THÉORÈME. — *Les tangentes en B et C, C et A, A et B aux cercles (O_a), (O_b), (O_c) passent, l'une par un des points de BROCARD, l'autre par l'autre, et les angles CDB, BEC, FAC, LCA, MBA, NAC sont égaux à l'angle de BROCARD du triangle T. (2)*

En effet, soient α' , γ' les projections orthogonales de (O_a) sur BC, AB; B'' le point où la tangente en B à (O_a) coupe AC; B'' se projette en α , γ sur BC, AB. Les quadrangles B γ' O α' , B'' γ B α sont semblables, ce qui donne

$$B''\alpha : B''\gamma = B\alpha' : B\gamma' = \frac{a}{2} : \frac{b^2}{2c} = \frac{c}{b} : \frac{b}{a},$$

(1) Cfr. J. LEEMANS, M. 1932 (Supplément).

(2) BERNES, J. E. 1896-43.

et prouve que BB'' passe par le point de BROCARD de T dont les distances aux trois côtés sont proportionnelles à $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{a}$ (point rétrograde). Par analogie, la tangente en C passe par le point direct de BROCARD et on a les égalités d'angles

$$B''BC = B O_a \alpha' = BDC = \theta = \dots$$

2. — Si on considère les céviennes AA_1 , BB_1 , CC_1 d'un point arbitraire P du plan d'un triangle T , puis les cercles (O_a) , (O_b) , (O_c) passant par B et C , C et A , A et B et tangents respectivement à BB_1 en B , CC_1 en C , AA_1 en A , le lieu de P pour lequel ces tangentes sont concourantes est la cubique

$$[x(b^2 - c^2) - caz] \cdot [y(c^2 - a^2) - abx] \cdot [z(a^2 - b^2) - bcy] + a^2b^2c^2xyz = 0,$$

circonscrite au triangle fondamental et passant par les points de BROCARD. Si la perpendiculaire en A à AB coupe BC en A' , si M_1 est le milieu de BA' , la cubique recoupe BC en M_1 et AM_1 est tangente à la cubique en A . Le point Q de concours des tangentes décrit la cubique

$$[x(b^2 - c^2) + aby] \cdot [y(c^2 - a^2) + bcz] \cdot [z(a^2 - b^2) + caz] - \frac{a^2b^2c^2}{S^3} \cdot$$

$$(ax + by + cz)^3 = 0$$

ayant les droites

$$x(b^2 - c^2) + aby = 0, y(c^2 - a^2) + bcz = 0, z(a^2 - b^2) + caz = 0$$

pour asymptotes d'inflexion. Cette cubique n'étant pas unicursale, on ne peut exprimer les coordonnées du point P en fonction de celles du point Q et réciproquement. (R. BOUVAIST).

2. — Soient une sphère (ω) pour laquelle les puissances des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre T aient les formes $k^2l^2, k^2m^2, k^2n^2, k^2p^2, l^2, m^2, n^2, p^2$ ayant des valeurs données et k étant un coefficient arbitraire.

THÉORÈME. — Le pôle du plan radical π des sphères $(O), (\omega)$, par rapport au tétraèdre T , coïncide avec le centre radical des sphères $(O_a), (O_b), (O_c)$ circonscrites aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC et qui coupent orthogonalement les sphères $(A, kl), (B, km), (C, kn), (D, kp)$.

En effet, d'après un théorème connu ⁽¹⁾, lorsque k varie, le centre de la sphère (ω) décrit une droite menée par le centre de la sphère (O) perpendiculairement au plan π dont les coordonnées barycentriques

⁽¹⁾ V. THÉBAULT, M. 1932-223.

⁽²⁾ M. LVII-51.

sont proportionnelles à l^2 , m^2 , n^2 , p^2 . Le pôle P du plan π , par rapport à T, a donc pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{l^2}$, $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{p^2}$.

D'autre part, nous avons établi que, si k varie, les sphères (O_a) , (O_b) , (O_c) , (O_d) conservent le même centre radical qui coïncide avec l'inverse normal Q, dans le tétraèdre T, du point P de coordonnées normales l^2A , m^2B , n^2C , p^2D ; ce qui achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRE. — *Les puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre T pour les sphères (O_a) , (O_b) , (O_c) , (O_d) sont des quantités inversement proportionnelles aux volumes des tétraèdres QBCD, QCDA, QDAB, QABC.*

CAS PARTICULIERS. 1. Quand on prolonge les arêtes DA, DB, DC en E, F, L, de manière que

$$AE = a' + \frac{b'^2 + c'^2}{a'}, \quad BF = b' + \frac{c'^2 + a'^2}{b'}, \quad CL = c' + \frac{a'^2 + b'^2}{c'},$$

les points A, B, C, E, F, L sont situés sur une sphère (O_a) , car

$$p^2 = DA \cdot DE = DB \cdot DF = DC \cdot DL = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

et on obtient de même trois sphères (O_a) , (O_b) , (O_c) correspondant aux arêtes (AB, AC, AD), (BC, BD, BA), (CD, CA, CB) déterminées par les égalités

$$l^2 = a'^2 + b^2 + c^2, \quad m^2 = b'^2 + c^2 + a^2, \quad n^2 = c'^2 + a^2 + b^2.$$

THÉORÈME. — *Le pôle du plan radical π de la sphère (O) et de la sphère (ω) pour laquelle les puissances des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre T sont proportionnelles aux sommes des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets, par rapport au tétraèdre T, et le centre radical des sphères (O_a) , (O_b) , (O_c) , (O_d) correspondantes, coïncident avec le réciproque du barycentre des carrés des arêtes de T.*

Car le pôle Q du plan π , par rapport à T, a pour coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{a'^2 + b^2 + c^2}, \quad \frac{1}{b'^2 + c^2 + a^2}, \quad \frac{1}{c'^2 + a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{a'^2 + b'^2 + c'^2},$$

et se confond avec le réciproque du barycentre de masses proportion-

nelles aux carrés des arêtes appliquées aux milieux de celles-ci (barycentre des carrés des arêtes ⁽¹⁾).

COROLLAIRE. — *Le plan π se confond avec le plan polaire du centre de gravité du tétraèdre T par rapport à la sphère DE LONGCHAMPS de celui-ci.*

COROLLAIRE. — *Le pôle, par rapport à T, du plan radical de la sphère (ω) pour laquelle les puissances des sommets de T sont inversement proportionnelles aux quantités l^2 , m^2 , n^2 , p^2 et le centre radical des sphères (O_a , (O_b), (O_c), (O_d) correspondantes se confondent avec le barycentre Q des carrés des arêtes.*

2. — Si on porte sur les arêtes DA, DB, DC du tétraèdre T, dans les sens de D vers A, D vers B, D vers C les segments

$$DE = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a'}, \quad DF = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b'}, \quad DL = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c'},$$

les points A, B, C, E, F, L sont une sphère (O_a), car

$$p^2 = DA \cdot DE = DB \cdot DF = DC \cdot DL = a^2 + b^2 + c^2,$$

et on obtient de même des sphères (O_a), (O_b), (O_c) correspondant aux égalités

$$l^2 = a^2 + b'^2 + c'^2, \quad m^2 = b^2 + c'^2 + a'^2, \quad n^2 = c^2 + a'^2 + b'^2.$$

THÉORÈME. — *Le pôle, par rapport au tétraèdre T, du plan radical de la sphère (O) et de la sphère (ω) pour laquelle les puissances des sommets de T sont proportionnelles aux sommes l^2 , m^2 , n^2 , p^2 des carrés des arêtes de la face opposée et le centre radical des sphères (O_a , (O_b), (O_c), (O_d) correspondantes coïncident avec le réciproque du barycentre des carrés des arêtes opposées ⁽²⁾.*

(1) L. RIPERT appelle ce point, centre corrélatif de la sphère circonscrite au tétraèdre dans son opuscule intitulé *La Dualité et l'Homographie dans le Triangle et le Tétraèdre*, p. 47.

(2) On désigne ainsi le barycentre Q' de masses appliquées au milieu de chaque arête de T et proportionnelles au carré de l'arête opposée. Les barycentres Q et Q' des carrés des arêtes et des carrés des arêtes opposées sont symétriques par rapport au centre de gravité G du tétraèdre T.

En effet, le pôle Q' du plan π , par rapport à T , a pour coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{a^2 + b'^2 + c'^2}, \frac{1}{b^2 + c'^2 + a'^2}, \frac{1}{c^2 + a'^2 + b'^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2},$$

et se confond avec le réciproque du barycentre des carrés des arêtes opposées.

COROLLAIRE. — Le pôle Q' , par rapport au tétraèdre T , du plan radical de la sphère (O) et de la sphère (ω) pour laquelle les puissances des sommets de T , sont inversement proportionnelles aux quantités l^2, m^2, n^2, p^2 et le centre radical des sphères $(O_a), (O_b), (O_c), (O_d)$ correspondantes coïncident avec le barycentre des carrés des arêtes opposées.

NOTE. — Le barycentre Q' des carrés des arêtes opposées d'un tétraèdre T possède d'autres propriétés intéressantes.

La droite GQ' a pour point à l'infini le point de coordonnées barycentriques

$$(b^2 + c^2 + a'^2) - (a^2 + b'^2 + c'^2), \dots,$$

dont le réciproque est situé sur la courbe lieu des points dont les extrémités des sécantes passant par ces points et s'appuyant sur deux arêtes opposées de T sont cosphériques. ⁽¹⁾

D'autre part, le réciproque Q'' de l'anticomplémentaire du point Q' , de coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{2(b^2 + c^2 + a'^2) - (a^2 + b'^2 + c'^2)}, \dots,$$

se confond, quand le tétraèdre T est orthocentrique, avec l'orthocentre dont les coordonnées sont

$$\frac{1}{a^2 + b'^2 - c'^2} = \frac{1}{c^2 + b'^2 - a'^2} = \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

Le point Q'' est une généralisation, pour un tétraèdre quelconque, de l'orthocentre d'un tétraèdre orthocentrique.

3. THÉORÈME. — Dans un tétraèdre, si on prolonge les arêtes issues d'un même sommet de k fois leurs longueurs au-delà des faces opposées,

(1) V. THÉBAULT, I. R. M. t. 1, 1945-49; A. M. 1950. pp. 663-667;
A. DE MAJO, I. R. M., t. 3, 1947-88.

le rapport de la somme des puissances de chacun des douze points obtenus par rapport à la sphère décrite sur l'arête opposée à celle sur laquelle il est situé, comme diamètre, et de la somme des carrés des arêtes est une somme de deux carrés.

Soient un tétraèdre $T \equiv ABCD$ et sur l'arête $AB = c$ le point I tel que $\vec{AI} = \vec{AB}(k+1)$. La puissance de I par rapport à la sphère de diamètre \vec{CD} s'exprime par le produit scalaire $\vec{IC} \cdot \vec{ID}$, et

$$\begin{aligned} P_{(i)} &= \vec{IC} \cdot \vec{ID} = (\vec{IA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{IA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{IA}^2 + \vec{IA} \cdot \vec{AC} + \vec{IA} \cdot \vec{AD} + \vec{AC} \cdot \vec{AD}. \end{aligned}$$

Sur l'arête AB se trouve aussi le point J tel que $\vec{BJ} = \vec{BA}(k+1) = -\vec{AI}$. La puissance de J par rapport à la sphère de diamètre CD s'exprime par le produit scalaire

$$\begin{aligned} P_{(j)} &= \vec{JC} \cdot \vec{JD} = (\vec{JA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{JA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{JA}^2 + \vec{JA} \cdot \vec{AC} + \vec{JA} \cdot \vec{AD} + \vec{AC} \cdot \vec{AD}. \end{aligned}$$

Si l'on fait la somme $P_{(i)} + P_{(j)}$, il reste

$$P_{(i)} + P_{(j)} = \vec{IA}^2 + \vec{JA}^2 (\vec{AC} + \vec{AD})(\vec{IA} + \vec{JA}) + 2\vec{AC} \cdot \vec{AD};$$

mais

$$\vec{IA}^2 = c^2(k+1)^2, \vec{JA} = k^2c^2, \vec{IA} + \vec{JA} = \vec{BA}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P_{(i)} + P_{(j)} &= c^2(2k^2 + 2k + 1) - \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2\vec{AC} \cdot \vec{AD} \\ &= c^2(2k^2 + 2k + 1) + \vec{AD} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BD}. \end{aligned}$$

On trouve de même pour les cinq autres arêtes, cinq expressions analogues et si l'on fait la somme on constate que les produits scalaires tels que $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ se détruisent. On a donc pour la somme des puissances

$$\Sigma(P_{(i)} + P_{(j)}) = (2k^2 + 2k + 1) \Sigma(a^2 + a'^2)$$

ce qui achève de démontrer le théorème. ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Cette démonstration vectorielle nous a été communiquée par M. R. GUILLOTIN (Le Mans).

Sur une généralisation à n variables des polynômes d'Abel-Laguerre

PAR

PAUL DELERUE

Les polynômes étendus de Laguerre à une variable ont une image symbolique connue

$$x^\alpha L_m^\alpha(x) \supset \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{m!} \frac{1}{p^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^m$$

Dans le cas où $\alpha = 0$, Monsieur Pierre Humbert, dans le premier travail ⁽¹⁾ où il entreprenait systématiquement l'étude du calcul symbolique à 2 variables, avait montré que les polynômes d'image symbolique $\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^m$ étaient une généralisation naturelle des polynômes d'Abel. Nous voudrions utiliser les règles d'un calcul symbolique à n variables à des polynômes étendus que nous définirons par l'égalité symbolique (R)

$$x_n^{\alpha_n} L_m^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1 \dots x_n) \supset_n \frac{\Gamma(m + \alpha_1 + 1) \dots \Gamma(m + \alpha_n + 1)}{[m!]^n} \cdot \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} \dots - \frac{1}{p_n}\right)^{+m}$$

où $p_1 \dots p_n$ correspondent symboliquement aux n variables $x_1 \dots x_n$.

1°) *Equations aux dérivées partielles auxquelles satisfont ces polynômes.*

Les polynômes étendus de Laguerre satisfont à l'équation différentielle

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + my = 0$$

⁽¹⁾ *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, tome 56; 1935, Série A, p. 39-42.

Les polynômes à n variables satisfont aux n équations aux dérivées partielles (où $i = 1, 2, \dots, n$).

$$x_i \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} + (\alpha_i + 1) \frac{\partial L}{\partial x_i} = x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial L}{\partial x_n} - mL.$$

Pour le démontrer, appliquons la relation symbolique

$$x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \supset -p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}$$

à la fonction $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'image $\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n)$

$$\text{où } \varphi(p_1, p_2, \dots, p_n) \supset \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \dots - \frac{1}{p_n} \right)^m$$

On en déduit

$$(1) \quad x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \alpha_1 h \supset \frac{-m}{p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \dots - \frac{1}{p_n} \right)^{m-1}$$

et en additionnant les n relations analogues

$$(2) \quad x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial h}{\partial x_n} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + m)h \supset \frac{-m}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n} \right)^{m-1}$$

D'autre part, on remarque que $x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \alpha_1 h$ s'annule pour $x_1 = 0$ si $\alpha_1 + 1 > 0$ et donc vu (1), on peut écrire

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \alpha_1 h \right) \supset \frac{-m}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n} \right)^{m-1}$$

En comparant (2) et (3), on obtient les n équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les fonctions h

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) - \alpha_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial h}{\partial x_n} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + m)h$$

et, sans difficulté, on écrira les équations annoncées.

2°) *Fonction génératrice de ces polynômes.*

En utilisant l'image symbolique de définition, on peut écrire

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[m!]^{n-1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} L_m^{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x_1 \dots x_n)}{\Gamma(m + \alpha_1 + 1) \dots \Gamma(m + \alpha_n + 1)} \sim_n \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} \times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{p_1} \dots - \frac{1}{p_n}\right)^m}{m!} \sim^m = \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} e^{\left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n}\right)z}$$

dont l'original est

$$e^z \left(\frac{x_1}{z}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{x_2}{z}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{x_n}{z}\right)^{\alpha_n} J_{\alpha_1}(2\sqrt{z}x_1) J_{\alpha_2}(2\sqrt{z}x_2) \dots J_{\alpha_n}(2\sqrt{z}x_n)$$

3°) *Relations de récurrence.*

Une première relation de récurrence sera obtenue en appliquant à (R) la formule symbolique $x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \sim_n - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}$, l'image obtenue s'exprimera au moyen des deux polynômes $L_m^{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n}$ et $L_{m-1}^{\alpha_1+1, \alpha_2 \dots \alpha_n}$ et, après simplifications, on aura

$$\frac{\partial L_m^{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n}}{\partial x_1} + \frac{1}{m^{n-1}} (m + \alpha_2) \dots (m + \alpha_n) L_{m-1}^{\alpha_1+1, \alpha_2 \dots \alpha_n} = 0$$

En appliquant à (R) la formule symbolique

$$x_1 h(x_1, x_2 \dots x_n) \sim_n - p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left[\frac{\varphi(p_1, p_2 \dots p_n)}{p_1} \right]$$

on aura une seconde relation de récurrence

$$L_m^{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{\alpha_1 + 1}{m + \alpha_1 + 1} L_m^{\alpha_1+1, \alpha_2 \dots \alpha_n} - \frac{1}{m^{n-1}} \frac{(m + \alpha_2) \dots (m + \alpha_n)}{(m + \alpha_1 + 1)} x_1 L_{m-1}^{\alpha_1+2, \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

Si on écrit $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n}\right)^m$ sous la forme

$$\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n}\right) \\ = \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n}\right)^{m-1} - \frac{1}{p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} \left(1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_n}\right)^m - \dots$$

on aura, en remontant aux originaux, après quelques simplifications

$$\frac{m^n I_m^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}}{(m + \alpha_1)(m + \alpha_2) \dots (m + \alpha_n)} = I_{m-1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} - \frac{x_1}{m + \alpha_1} I_{m-1}^{\alpha_1+1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \\ - \frac{x_2}{m + \alpha_2} I_{m-1}^{\alpha_1, \alpha_2+1, \dots, \alpha_n} - \dots - \frac{x_n}{m + \alpha_n} I_{m-1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n+1} \quad (5)$$

qui donne le polynôme d'ordre m en fonction des polynômes d'ordre $m - 1$.

Enfin, si dans la relation (4) on change α_1 en $\alpha_1 - 1$, on a

$$\frac{x_1}{m + \alpha_1} I_{m-1}^{\alpha_1+1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = \frac{m^{n-1}}{(m + \alpha_2) \dots (m + \alpha_n)} \left[\frac{\alpha_1}{m + \alpha_1} I_m^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} - I_m^{\alpha_1-1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \right]$$

Si on ajoute les n relations analogues à la relation (4), on obtiendra une relation de récurrence à coefficients constants.

$$m^{n-1} (m + \alpha_1 + \dots + \alpha_n) I_m^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} - m^{n-1} \sum (m + \alpha_1) I_m^{\alpha_1-1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \\ = (m + \alpha_1)(m + \alpha_2) \dots (m + \alpha_n) I_{m-1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$$

40) *Formules de duplication de l'argument et de l'indice. Expression de ces polynômes à l'aide de polynômes étendus à une variable.*

Nous n'insisterons pas sur les formules de duplication de l'argument [calcul de $I_m^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$] ou de l'indice [calcul de $I_{2m}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (x_1, x_2, \dots, x_n)$], car elles ne font que généraliser les formules données par Monsieur Humbert dans l'article cité.

Nous signalerons seulement que, pour nous borner au cas de deux variables, on peut écrire

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} - 1\right) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{(-1)^{m-\mu-\nu}}{\mu! \nu! (m-\mu-\nu)!} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\mu} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{\nu}$$

On en déduit une expression de $L_m^{\alpha, \beta}(x, y)$ en fonction de polynômes étendus à une variable que nous noterons l_m^{α}

$$\frac{L_m^{\alpha, \beta}(x, y)}{\Gamma(m + \alpha + 1) \Gamma(m + \beta + 1)} = \frac{1}{m!} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{(-1)^{m-\mu-\nu}}{(m-\mu-\nu)!} l_{\mu}^{\alpha}(x) l_{\nu}^{\beta}(y)$$

On en déduit, si $\alpha = \beta$, l'intégrale double

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} x^{\alpha} y^{\alpha} L_m^{\alpha, \alpha}(x, y) L_n^{\alpha, \alpha}(x, y) dx dy$$

Car I sera une somme d'intégrales doubles de la forme

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} l_{\mu}^{\alpha}(x) l_{\mu'}^{\alpha}(x) dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} l_{\nu}^{\alpha}(y) l_{\nu'}^{\alpha}(y) dy$$

et vu l'orthogonalité connue pour les polynômes $l_{\mu}^{\alpha}(x)$, $l_{\mu'}^{\alpha}(x)$ avec la fonction poids $e^{-x} x^{\alpha}$, toutes seront nulles sauf celles correspondant à la fois à $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$. Dans ce cas, elles vaudront

$$(-1)^{\mu+\nu} \Gamma(\mu + \alpha + 1) \Gamma(\nu + \alpha + 1).$$

5^o) Généralisation à ces polynômes de la formule

$$l_m^{\alpha}(x) = \frac{1}{m!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^m}{dx^m} [x^{m+\alpha} e^{-x}]$$

Nous raisonnerons d'abord dans le cas de deux variables et nous écrirons

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta}} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^m &= \frac{1}{p^{\alpha} q^{\beta}} \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{pq} \right]^m \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k \cdot \frac{1}{p^{m-k+\alpha}} \cdot \frac{1}{q^{m-k+\beta}} \end{aligned}$$

En remontant aux originaux, on écrira

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k} [k!]^2}{\Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)} x^{m-k+\alpha} y^{m-k+\beta} l_k^{m-k+\alpha}(x) l_k^{m-k+\beta}(y) \\ = \frac{[m!]^2}{\Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)} x^\alpha y^\beta L_m^{\alpha, \beta}(x, y)$$

En utilisant la formule à une variable donnée ci-dessus pour l_m^α , nous trouverons

$$L_m^{\alpha, \beta}(x, y) = \frac{e^{x+y}}{[m!]^2} x^{-\alpha} y^{-\beta} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} [x^{m+\alpha} y^{m+\beta} e^{-(x+y)}]$$

Dans le cas du polynôme à n variables, $L_m^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sera égal à

$$\frac{e^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{[m!]^n} x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} \dots x_n^{-\alpha_n}$$

multiplié par une somme de termes qui seront (à des constantes multiplicatives près) des dérivées d'un certain ordre de

$$x_1^{m+\alpha_1} x_2^{m+\alpha_2} \dots x_n^{m+\alpha_n} e^{-(x_1+x_2+\dots+x_n)}$$

mais ces termes seront beaucoup plus nombreux que dans le cas précédent et l'ordre de dérivation sera donné par une formule plus compliquée.

6°) Relations entre ces polynômes et les polynômes d'Hermite.

Entre les polynômes étendus de Laguerre $l_m^\alpha(x)$ et les polynômes d'Hermite h_m , on connaît les relations

$$x l_m^{1/2}(x^2) = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1} m!} h_{2m+1}(x) \quad (6)$$

$$l_m^{1/2}(x^2) = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!} h_{2m}(x) \quad (7)$$

$$\text{On sait aussi que } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m h_{2m+1}(x)}{(2m+1)!} = e \sin 2x \quad (8)$$

Or, les polynômes d'Hermite vérifient l'une ou l'autre des deux formules symboliques

$$\frac{h_{2m}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \supset \frac{(2m)!}{m!} \sqrt{\pi} p \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^m \quad h_{2m+1}(\sqrt{x}) \supset \frac{(2m+1)!}{+m!} \sqrt{\pi} p \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^m$$

En introduisant des polynômes à n variables définis par l'une ou l'autre des deux égalités symboliques

$$\frac{H_{2m}(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})}{\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}} \supset \frac{(2m)!}{m!} \pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{p_1 p_2 \dots p_n} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} - 1 \right)^m$$

$$H_{2m+1}(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n}) \supset \frac{(2m+1)!}{m!} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} - 1 \right)^m$$

on généralisera facilement les formules (6) (7) (8). On fera pour cela, dans la relation symbolique (R) soit $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{2}$

soit $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = -\frac{1}{2}$ et on obtiendra

$$x_1 x_2 \dots x_n I_m^{1_2, 1_2, \dots, 1_2} (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = \frac{(-1)^m [(2m+1)!]^{n-1}}{2^{(2m+1)n} [m!]^{2n-1}} H_{2m+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$I_m^{-1_2, -1_2, \dots, -1_2} (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = \frac{(-1)^m [(2m)!]^{n-1}}{2^{2mn} [m!]^{2n-1}} H_{2m}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m H_{2m+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(2m+1)!} = e \sin 2x_1 \sin 2x_2 \dots \sin 2x_n$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m H_{2m}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(2m)!} = e \cos 2x_1 \cos 2x_2 \dots \cos 2x_n$$

Or, les polynômes H introduits s'expriment au moyen des polynômes d'Hermite d'argument $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n$, $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} - x_{n-1} + x_n$, etc...

Pour le montrer, on établira d'abord que l'on a, par exemple pour le polynôme H d'indice pair

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m H_{2m}(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})}{(2m)!} t^m = e^t \cos(2\sqrt{tx_1}) \cos(2\sqrt{tx_2}) \dots \cos(2\sqrt{tx_n})$$

Une formule analogue existe pour le polynôme d'indice impair. En changeant t en $-t^2$, x_1 en $x_1^2 \dots x_n$ en x_n^2 , la formule précédente devient

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{2m}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(2m)!} t^{2m} = e^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx_1) \operatorname{ch}(2tx_2) \dots \operatorname{ch}(2tx_n).$$

En développant en série le second membre, on fera apparaître le polynôme d'Hermite

$$h_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k} \cdot 2^{2k}}{(2k)! (m-k)!} x^{2k}$$

On obtiendra dans le cas de polynômes à 2 variables

$$H_{2m}(x, y) = \frac{h_{2m}(x+y) + h_{2m}(x-y)}{2}$$

$$H_{2m-1}(x, y) = \frac{h_{2m}(x+y) - h_{2m}(x-y)}{4m}$$

Dans le cas de polynômes à 3 variables, on obtient

$$H_{2m}(x, y, z) = \frac{h_{2m}(x+y+z) + h_{2m}(x+y-z) + h_{2m}(x-y+z) + h_{2m}(y+z-x)}{4}$$

$$H_{2m+1}(x, y, z) = \frac{h_{2m+1}(x+y-z) + h_{2m+1}(x+z-y) + h_{2m+1}(y+z-x) - h_{2m+1}(x+y+z)}{8m(2m+1)}$$

Intégrales et calcul symbolique

PAR

L. POLI

I) — On sait que l'on obtient facilement la valeur d'un grand nombre d'intégrales définies au moyen du calcul symbolique. Nous allons indiquer un procédé qui permet d'en obtenir une impressionnante quantité.

Soit l'égalité symbolique :

$$h(t) \supset f(p)$$

On en déduit, avec a constant positif :

$$h(t/a) \supset f(ap).$$

Multipliant les deux membres par une fonction arbitraire $g(a) da/a$ et intégrant entre les limites, pour l'instant indéterminées, m et n :

$$\int_m^n h(t/a) g(a) da/a \supset \int_m^n f(ap) g(a) da/a$$

Faisant dans le premier membre le changement de variables $a = t/S$ et dans le second $a = u/p$, où S et u sont les nouvelles variables d'intégration

$$\int_{t/n}^{t/m} h(S) g(t/S) dS/S \supset \int_{pm}^{pn} f(u) g(u/p) du/u$$

En particulierisant m et n nous en tirerons les intégrales fondamentales suivantes que nous voulions établir :

A) — Pour $m = 0$ $n = 1$

$$(1) \quad \int_t^\infty h(S) g(t/S) dS/S \supset \int_0^p f(u) g(u/p) du/u$$

B) — Pour $m = 1$ $n = \infty$

$$(2) \quad \int_0^t h(S) g(t/S) dS/S \supset \int_p^\infty f(u) g(u/p) du/u$$

C) — Pour $m = 0$ $n = \infty$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} h(S) g(t/S) dS/S \supset \int_c^{\infty} f(u) g(u/p) du/u$$

Validité : Nous avons intégré une égalité symbolique; cela suppose une inversion de l'ordre d'intégration; il faudra s'assurer de la convergence et de l'existence des intégrales dans les deux membres. — $g(a)$ est donc une fonction arbitraire telle que les intégrales existent.

II) Nous allons particulariser la fonction $g(a)$, ce qui nous fournira une liste de formules d'intégration que nous appliquerons au n° suivant.

Pour abréger l'écriture nous laisserons souvent les limites indéterminées; une relation du type :

$$\int h(S) g(t/S) dS/S \supset \int f(u) g(u/p) du/u$$

tiendra la place des trois équations (1) (2) (3) du n° précédent.

A) — Avec $g(a) = a^m$, on obtient :

$$t^m \int h(S) \frac{dS}{S^{m+1}} \supset p^{-m} \int f(u) u^{m-1} du \quad (4)$$

Pour $m = 0$ on retrouve trois relations données par Van der Pol (*Phil. Mag.* Dec. 1929 page 863).

Avec les limites $(0, \infty)$ les deux intégrales sont des constantes, et remplaçant t^m par son image $\frac{\Gamma(m+1)}{p^m}$ il reste l'égalité, ordinaire et non plus symbolique :

$$(5) \quad \Gamma(m+1) \int_0^{\infty} h(S) \frac{dS}{S^{m+1}} = \int_0^{\infty} f(u) u^{m-1} du$$

qui donnerait de multiples expressions de la fonction $\Gamma(m+1)$ puisque $h(S)$ est arbitraire. Nous verrons des exemples; outre l'existence des intégrales, la démonstration suppose $m > -1$.

B) — Avec $g(a) = \frac{a^m}{a^n + 1}$ on aura les relations

$$(6) \quad t^m \int h(S) \frac{S^{n-m-1} dS}{S^n + t^n} \supset p^{n-m} \int f(u) \frac{u^{m-1} du}{p^n + u^n}$$

et spécialement pour $n = 2m$ la relation symétrique

$$(7) \quad t^m \int h(S) \frac{S^{m-1}}{S^{2m} + t^{2m}} dS \supset p^m \int f(u) \frac{u^{m-1} du}{p^{2m} + u^{2m}}$$

C) — Prenons encore $g(a) = \frac{a^m}{\sqrt{a^2 + 1}}$ et il viendra

$$(8) \quad t^m \int \frac{h(S) dS}{S^m \sqrt{t^2 + S^2}} \supset \frac{1}{p^{m-1}} \int f(u) \frac{u^{m-1} du}{\sqrt{u^2 + p^2}}$$

Pour $m = 1$ 2 on a une relation symétrique. — On aurait pu prendre plus généralement

$$g(a) = \frac{a^m}{(a^n + 1)^r},$$

mais nous n'utiliserons que le cas plus simple signalé ici.

D) — Enfin pour donner un dernier exemple soit $g(a) = \frac{a^m}{\sqrt{1 - a^2}}$

il viendra la seule relation :

$$(9) \quad t^m \int_1^\infty \frac{h(S) dS}{S^m \sqrt{S^2 - t^2}} \supset \frac{1}{p^{m-1}} \int_0^p \frac{f(u) u^{m-1} du}{\sqrt{p^2 - u^2}}$$

avec $g(a) = \frac{a^m}{\sqrt{a^2 - 1}}$, au contraire

$$(10) \quad t^m \int_0^t \frac{h(S) dS}{S^m \sqrt{t^2 - S^2}} \supset \frac{1}{p^{m-1}} \int_0^\infty \frac{f(u) u^{m-1} du}{\sqrt{u^2 - p^2}}$$

III) — *Applications.* — Il suffit à présent d'individualiser la fonction $h(t)$ pour avoir des intégrales aussi nombreuses qu'on voudra ; on se servira à cet effet des formulaires de M. HUMBERT et Mc LACHLAN dont nous utiliserons les notations (Mémorial des Sc. mathématiques n° 100 et 113) ou des tables de Doetsch (Tabellen zur Laplace — Transformation — Springer 1947). — En choisissant des fonctions $h(t)$ ou des images $f(p)$ telles que l'on sache calculer l'intégrale d'un des deux membres, on pourra avoir celles de l'autre membre. — Voici quelques exemples.

A) Voyons d'abord la formule (5)

1) Avec $h(t) = 1 - e^{-t} \supset \frac{1}{p+1}$

$$\Gamma(m+1) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-s}}{s^{m+1}} ds = \int_0^{\infty} \frac{u^{m-1} du}{u+1} = \Gamma(m) \Gamma(1-m) \quad 0 < m < 1$$

2) Avec $h(t) = \sin t \supset \frac{p}{p^2+1}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin S}{S^{m+1}} dS = \frac{\pi}{2\Gamma(m+1) \cos \pi m/2} \quad -1 < m < 1$$

3) Avec $h(t) = \cos t \supset \frac{p^2}{p^2+1}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos S}{S^{m+1}} dS = \frac{\pi}{2\Gamma(m+1) \sin \pi m/2} \quad -1 < m < 0$$

4) On peut aussi utiliser des fonctions discontinues. Soit $h(t) = \sin t$ si $t > a$, et 0 si $t < a$, dont l'image est $f(p) = \frac{p \cos a + p^2 \sin a}{p^2 + 1} e^{-ap}$.

Il viendra, avec $m+1 = n > 0$:

$$\Gamma(n) \int_a^{\infty} \frac{\sin S}{S^n} dS = \cos a G_n(a) + \sin a G_{n+1}(a)$$

où $G_n(x)$ est l'intégrale de Gilbert (Voir Colombo. *Bull. Sci. math.* 1943, page 104).

5) Enfin avec les polynômes de Laguerre $e^{-t} L_n(t) \supset \frac{p^{n+1}}{(p+1)^{n+1}}$

on aura :

$$\Gamma(m+1) \int_0^{\infty} e^{-s} L_n(s) \frac{ds}{s^{m+1}} = \frac{\Gamma(m+n+1) \Gamma(-m)}{\Gamma(m+1)}$$

valide pour n entier et $m < 0$ et non entier.

Par exemple pour $m = -1/2$ la relation curieuse :

$$\int_0^{\infty} e^{-s} L_n(s) \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)}$$

B) On a vu la manière de procéder ; nous nous étendrons moins

sur les autres relations. Prenons pour les formules (4) :

1^o) $h(t) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) \supset p^{-n} e^{-1/p}$ d'où :

$$t^m \int_0^t \frac{J_n(2\sqrt{s}) ds}{s^{m+1-n/2}} \supset \frac{1}{p^m} P(1/p, n-m) \quad -1 < m < n$$

$$t^m \int_0^\infty \frac{J_n(2\sqrt{s}) ds}{s^{m+1-n/2}} \supset \frac{1}{p^m} Q(1/p, n-m) \quad m+1 > n/2 > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{J_n(2\sqrt{s})}{s^r} ds = \frac{\Gamma(n/2 - r + 1)}{\Gamma(r + n/2)} \quad 0 < r < n/2 + 1$$

$P(x, n)$ et $Q(x, n)$ sont les fonctions de Prym.

2) Avec la fonction de Schlömilch

$$h(t) = \frac{t^n}{1+t} \supset \Gamma(1+n) \frac{S(1+n, p)}{p^{n-1}}$$

$$t^m \int \frac{s^{n-m-1} ds}{1+s} \supset \frac{\Gamma(n+1)}{p^m} \int S(n+1, u) u^{m-n} du$$

en particulier : $\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{\pi}{\sin \pi(n-m)} = \int_0^\infty S(n+1, u) u^{m-n} du$

et si $n = m + 1/2$

$$\pi^{1/2} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} = \int_0^\infty S(n+1, v^2) dv \quad n+1/2 > 0$$

et $t^m \arctg \sqrt{t} \supset 2 \frac{\Gamma(m+3/2)}{p^m} \int_0^\infty S(m+3/2, v^2) dv$

3) Enfin avec la fonction P de Prym

$h(t) = t^n \sin t < 1$ et 0 si $t > 1$, d'image $\frac{P(p, n+1)}{p^v}$ on trouve pour

les limites $(0, \infty)$ et $n > m > -1$

$$\frac{\Gamma(1+m)}{n-m} = \int_0^\infty \frac{P(u, n+1)}{u^{n+1-m}} du$$

et pour les limites (t, ∞)

$$t^m \int_t^1 s^{n-m-1} ds \supset \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ \frac{1}{p^m} \int_0^p \frac{P(u, n+1)}{u^{n+1-m}} du & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

Effectuant le calcul à gauche, et prenant l'image :

$$P(p, m+1) - p^{m-n} P(p, n+1) = (n-m) \int_0^p \frac{P(u, n+1)}{u^{n+1-m}} du$$

qui donne pour P une relation de récurrence.

Si on fait tendre n vers m , on obtient

$$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ si } t > 1 \\ t^m \text{ Log } 1/t \text{ si } t < 1 \end{array} \right\} \supset p^{-m} \int_0^p \frac{P(u, m+1)}{u} du$$

C) Pour la formule (7) nous prendrons $m = 1$, $h(t) = \sin t \supset \frac{p}{p^2 + 1}$

$$t \int_0^\infty \frac{\sin S}{S^2 + t^2} dS \supset p \int_0^\infty \frac{u du}{(u^2 + 1)(u^2 + p^2)} ;$$

Le second membre s'intègre, d'où :

$$t \int_0^\infty \frac{\sin S}{S^2 + t^2} dS \supset \frac{p}{p^2 - 1} \text{Log } p$$

$$\text{soit } \int_0^\infty \frac{\sin S}{S^2 + t^2} dS = \frac{\text{ch } t \text{ sh } it - \text{sh } t \text{ ch } it}{t}$$

D) Pour (8) prenons $h(t) = J_1(t) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} [\sqrt{p^2 + 1} - p]$

$$\int_0^\infty \frac{J_1(S) dS}{\sqrt{t^2 + S^2}} \supset p \int_0^\infty \left[\frac{du}{\sqrt{p^2 + u^2}} - \frac{u du}{\sqrt{(u^2 + 1)(p^2 + u^2)}} \right] = p \text{Log } \frac{(1 + p)}{p}$$

L'intégrale du premier membre est $I_{1/2}(t/2) K_{1/2}(t/2)$. L'original du second est connu : c'est

$$\frac{1 - e^{-t}}{t} \text{ d'où la relation facile à vérifier :}$$

$$I_{1/2}(t/2) K_{1/2}(t/2) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

Notons enfin que les formules 8, 9 ou 10 permettent d'obtenir les originaux des intégrales elliptiques. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

Extension d'un théorème de Poincaré aux systèmes d'équations récurro-différentielles de forme normale dépendant d'un paramètre variable

PAR

R. H. GERMAY,
professeur à l'Université de Liège

RÉSUMÉ. — Le théorème de Poincaré relatif au développement en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'un paramètre λ , des intégrales infiniment voisines des systèmes d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z; \lambda) \quad , \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z; \lambda) \quad (*)$$

peut être étendu aux solutions infiniment voisines des systèmes d'équations récurro-différentielles. Les résultats indiqués ci-après (**) généralisent ceux que nous avons établis pour les équations différentielles récurrentes.

§ 1. — Considérons les systèmes d'équations récurro-différentielles

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_n}{dt} = F_n(t; x_n, y_n, z_n; x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}; \lambda) \\ \frac{dy_n}{dt} = G_n(t; x_n, y_n, z_n; x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}; \lambda) \\ \frac{dz_n}{dt} = H_n(t; x_n, y_n, z_n; x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}; \lambda) \end{array} \right. \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Supposons les fonctions F_n , G_n , H_n bornées dans leur ensemble et développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de u , v , w , u^* , v^* , w^* , λ

(*) Voir : E. GOURSAT, Cours d'Analyse mathématique, 3^e éd., t. III, chap. XXIII, § 463, p. 20.

(**) R. H. GERMAY : Extension d'un théorème de Poincaré aux équations récurro-différentielles de forme normale dépendant d'un paramètre variable. (*Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, t. 20, 1951, p. 678).

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & F_n(t; u, v, w; u^*, v^*, w^*; \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \dots \sum_{\gamma'=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(n)}(t) u^{\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} u^{*\alpha'} v^{*\beta'} w^{*\gamma'} \\
 & G_n(t; u, v, w; u^*, v^*, w^*; \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \dots \sum_{\gamma'=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} B^{(n)}(t) u^{\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} u^{*\alpha'} v^{*\beta'} w^{*\gamma'} \\
 & H_n(t; u, v, w; u^*, v^*, w^*; \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \dots \sum_{\gamma'=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} C^{(n)}(t) u^{\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} u^{*\alpha'} v^{*\beta'} w^{*\gamma'}
 \end{aligned}$$

dans le champ de variation défini par les relations

$$(3) \quad |u| \leq \rho, |v| \leq \rho, |w| \leq \rho, |u^*| \leq \rho, |v^*| \leq \rho, |w^*| \leq \rho, |\lambda| \leq \rho$$

Les coefficients A, B, C sont des fonctions continues de t dans l'intervalle $(0, t_1)$. Sans nuire à la généralité du raisonnement, nous pouvons toujours supposer que les séries (2) ne renferment aucun terme indépendant des u, \dots, w^*, λ . Les équations différentielles récurrentes (1) où l'on fait $\lambda = 0$, ont les solutions banales

$$(4) \quad x_n = y_n = z_n = x_{n+1} = y_{n+1} = z_{n+1} = 0$$

Nous nous proposons de satisfaire aux équations (1) elles-mêmes par des développements en séries

$$(5) \quad \begin{cases} x_n(t, \lambda) = \lambda x_{n,1}(t) + \lambda^2 x_{n,2}(t) + \dots + \lambda^p x_{n,p}(t) + \dots \\ y_n(t, \lambda) = \lambda y_{n,1}(t) + \lambda^2 y_{n,2}(t) + \dots + \lambda^p y_{n,p}(t) + \dots \\ z_n(t, \lambda) = \lambda z_{n,1}(t) + \lambda^2 z_{n,2}(t) + \dots + \lambda^p z_{n,p}(t) + \dots \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

dont il faudra démontrer la convergence uniforme et la dérivabilité terme à terme par rapport à t .

Les fonctions $x_{n,p}, y_{n,p}, z_{n,p}$ doivent s'annuler pour $t = 0$.

Exprimons que $x_n, y_n, z_n, x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ vérifient les équations récurro-différentielles (1), nous obtenons en égalant les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres, les équations suivantes :

$$(6_1) \quad \begin{cases} \frac{dx_{n,1}}{dt} = A_{1,0,0;0,0,0;0}^{(n)}(t) x_{n,1}(t) + A_{0,1,0;0,0,0;0}^{(n)}(t) y_{n,1}(t) \\ \quad + A_{0,0,1;0,0,0,0}^{(n)}(t) z_{n,1}(t) \\ \quad + A_{0,0,0;1,0,0;0}^{(n)}(t) x_{n+1,1}(t) + A_{0,0,0;0,1;0;0}^{(n)}(t) y_{n+1,1}(t) \\ \quad + A_{0,0,0;0,0,1;0}^{(n)}(t) z_{n+1,1}(t) + A_{0,0,0;0,0,0;1}^{(n)}(t) \\ \frac{dy_{n,1}}{dt} = B_{1,0,0;0,0,0;0}^{(n)}(t) x_{n,1}(t) + \dots + B_{0,0,0;0,0,0;1}^{(n)}(t) \\ \frac{dz_{n,1}}{dt} = C_{1,0,0;0,0,0;0}^{(n)}(t) x_{n,1}(t) + \dots + C_{0,0,0;0,0,0;1}^{(n)}(t) \end{cases}$$

et en général

$$(6_p) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_{n,p}}{dt} &= A_{1,0,0;0,0,0;0}^{(n)}(t) x_{n,p}(t) + \dots + A_{0,0,0;0,0,1;0}^{(n)}(t) z_{n+1,p}(t) \\ &\quad + U_p^{(n)}[x_{n,1}(t), \dots, x_{n,p-1}(t), \dots, z_{n+1,p-1}(t)] \\ \frac{dy_{n,p}}{dt} &= B_{1,0,0;0,0,0;0}^{(n)}(t) x_{n,p}(t) + \dots + V_p^{(n)} \\ \frac{dz_{n,p}}{dt} &= C_{1,0,0;0,0,0;0}^{(n)}(t) x_{n,p}(t) + \dots + W_p^{(n)}, \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ p = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right) \end{aligned} \right.$$

Les expressions $U_p^{(n)}$, $V_p^{(n)}$, $W_p^{(n)}$ sont des polynômes à coefficients entiers positifs par rapport à certains coefficients $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ et aux fonctions $x_{n,1}$, $y_{n,1}$, $z_{n,1}$, \dots , $x_{n+1,p-1}$, $y_{n+1,p-1}$, $z_{n+1,p-1}$ supposées calculées.

Les systèmes (6) d'équations récurro-différentielles définissent des solutions qui s'annulent en $t = 0$.

Théoriquement, on peut donc, comme dans le théorème classique de Poincaré, construire les développements formels des intégrales présumées des systèmes récurro-différentiels normaux (1).

§ 3. — Pour établir la convergence de ces développements, il suffit maintenant de reprendre, à quelques variantes près, les calculs et raisonnements de la note rappelée ci-dessus. On considère des systèmes d'équations récurro-différentielles auxiliaires

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \frac{dX_n}{dt} &= \Phi_n(t; X_n, Y_n, Z_n; X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}; \lambda) \\ \frac{dY_n}{dt} &= \Psi_n(t; X_n, \dots, Z_{n+1}; \lambda), \quad \frac{dZ_n}{dt} = \Omega_n(t; X_n, \dots, Z_{n+1}; \lambda) \end{aligned} \right.$$

où les fonctions Φ_n , Ψ_n , Ω_n jouissent des propriétés imposées aux fonctions F_n , G_n , H_n , mais possèdent en plus la suivante : les coefficients de leurs développements en séries, qu'il est actuellement superflu d'écrire, sont des fonctions dominantes pour les coefficients correspondants $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ des fonctions F_n , G_n , H_n dans l'intervalle $(0, t)$. Si l'on essaye de satisfaire aux équations (7) par des développements en série de la forme

$$(8) \quad X_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{k=\infty} X_{n,k}(t) \lambda^k, \quad Y_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{k=\infty} Y_{n,k}(t) \lambda^k, \quad Z_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{k=\infty} Z_{n,k}(t) \lambda^k,$$

moyennant les mêmes conditions initiales que pour les équations (1), on trouve que les $X_{n,k}$, $Y_{n,k}$, $Z_{n,k}$ se définissent de proche en proche par des équations récurro-différentielles analogues aux équations (6), et que ces fonctions $X_{n,k} \dots$ sont dominantes pour les fonctions $x_{n,k}, \dots$ de rang correspondant.

On profite de l'indétermination des fonctions Φ_n , Ψ_n , Ω_n pour les prendre toutes égales à la fonction simple

$$(9) \quad M \frac{\frac{u+v+w+u^*+v^*+w^*+\lambda}{\rho}}{1 - \frac{u+v+\dots+w^*+\lambda}{\rho}} \left[1 + \frac{u+v+\dots+w^*+\lambda}{\rho} \right]$$

où M désigne un nombre positif fixe supérieur au module de toutes les fonctions F_n , G_n , H_n . On constate que les équations (7), compte tenu des conditions initiales, définissent des fonctions égales entre elles. La valeur commune u de ces fonctions est la solution de l'équation différentielle

$$(10) \quad \frac{du}{dt} = \frac{M}{\rho} \cdot \frac{6u + \lambda}{1 - \frac{6u + \lambda}{\rho}} \left(1 + \frac{6u + \lambda}{\rho} \right)$$

s'annulant en $t = 0$: La démonstration s'achève comme dans le théorème de Poincaré et dans la note rappelée au début de celle-ci. Nous obtenons ainsi la proposition suivante.

Considérons les systèmes d'équations différentielles récurrentes (1) où nous supposons les fonctions F_n , G_n , H_n développables en séries entières sous la forme (2) avec des coefficients continus $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$. Imaginons que ces développements ne contiennent pas de termes indépendants de u , \dots w^ , λ . Pour des valeurs de λ suffisamment petites en module, les systèmes récurro-différentiels (1) définissent un système unique d'intégrales $x_n(t, \lambda)$, $y_n(t, \lambda)$, $z_n(t, \lambda)$ ($n = 1, 2, \dots$) s'annulant en $t = 0$ et infiniment voisines des solutions nulles des équations (1) où l'on fait $\lambda = 0$.*

Ces intégrales $x_n(t, \lambda)$, $y_n(t, \lambda)$, $z_n(t, \lambda)$ sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de λ ; les coefficients de ces développements sont des fonctions continues de t dans l'intervalle où les intégrales existent.

Saive, le 5 décembre 1951.

Congruences formed by the Tangents to a Surface

BY

SHRI KRISHNA,
Lucknow University

The object of this paper is to study a rectilinear congruence formed by the tangents to a surface, which will be a focal surface of the congruence. Some interesting results have been obtained in the particular case when the congruence is formed by the tangents to a curve on the surface.

1. — Let S_1 be the surface of reference and y^i the coordinates of a point on it. Let the direction cosines of a ray through the point y^i be λ^i , the ray considered being a tangent to a surface S at the point x^i and the distance between the corresponding points on two surfaces being t . Then

$$y^i = x^i + t\lambda^i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Since the ray through x^i is a tangent to S ,

$$\lambda^i = p^\alpha \cdot x_{,\alpha}^i, \quad (\alpha = 1, 2), \quad * \quad (1.2)$$

where p^α are the contravariant components of a unit vector in the surface S at the point x^i and $x_{,\alpha}^i$ denotes covariant differentiation of x^i with regard to u^α based on the first fundamental tensor

$$g_{\alpha\beta} = x_{,\alpha}^i \cdot x_{,\beta}^i \quad (1.3)$$

of the surface S .

Substituting for λ^i from (1.2) in (1.1) we have

$$y^i = x^i + tp^\alpha x_{,\alpha}^i. \quad (1.4)$$

The coefficients of Kummer's second quadratic form are given by (Behari & Mishra, 1949)

$$\mu_{\alpha\beta} = \lambda_{,\alpha}^i \lambda_{,\beta}^i. \quad (1.5)$$

(*) In what follows Latin indices take the values (1, 2, 3) and Greek indices the values (1, 2).

Differentiating the equations (1. 2) and (1. 4) covariantly with regard to u^α based on $g_{\alpha\beta}$ and substituting in (1. 5) we have

$$\mu_{\alpha\beta} = (p^\gamma_{,\alpha} x^i_{,\gamma} + p^\gamma x^i_{,\gamma\alpha}) [x^i_{,\beta} + t(p^\delta_{,\beta} x^i_{,\delta} + p^\delta x^i_{,\delta\beta}) + p^\delta x^i_{,\delta} t_{,\beta}] . \quad (1. 6)$$

With the help of Gauss equations (Eisenhart, 1940, p. 216) :

$$x^i_{,\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} X^i , \quad (1. 7)$$

where X^i are the direction cosines of the normal to S at x^i and $d_{\alpha\beta}$ is the second fundamental tensor of S , given by

$$d_{\alpha\beta} = -X^i_{,\alpha} x^i_{,\beta} = -X^i_{,\beta} x^i_{,\alpha} , \quad (1. 8)$$

(1. 6) can be written as

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha\beta} &= (p^\gamma_{,\alpha} x^i_{,\gamma} + p^\gamma d_{\gamma\alpha} X^i) [x^i_{,\beta} + t(p^\delta_{,\beta} x^i_{,\delta} + p^\delta X^i d_{\delta\beta}) + p^\delta x^i_{,\delta} t_{,\beta}] \\ &= p^\gamma_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + t(p^\gamma_{,\alpha} p^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) + p^\gamma_{,\alpha} p^\delta g_{\gamma\delta} t_{,\beta} . \end{aligned} \quad (1. 9)$$

The congruence will be normal, if (Eisenhart, 1909, p. 323)

$$\epsilon^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = 0 ,$$

$$(\text{where } \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0 ,$$

$$\text{and } \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1) ,$$

$$\text{i. e. } [p^\gamma_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + t(p^\gamma_{,\alpha} p^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) + p^\gamma_{,\alpha} p^\delta g_{\gamma\delta} t_{,\beta}] \epsilon^{\alpha\beta} = 0$$

or, on simplification

$$\epsilon^{\alpha\beta} (p^\gamma_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + p^\gamma_{,\alpha} p^\delta g_{\gamma\delta} t_{,\beta}) = 0 . \quad (1. 10)$$

The equation (1. 10) gives a necessary and sufficient condition in terms of the fundamental tensors of a focal surface that a congruence be a normal congruence.

In particular when the congruence is formed by the tangents to a curve on S , we have

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{ds} = x^i_{,\gamma} u'^\gamma , \quad (1. 11)$$

$$\text{where } u' \equiv \frac{du^\gamma}{ds} , \quad (1. 12)$$

ds being the linear element of this curve.

Comparing the equations (1. 2) and (1. 11) we have, in this particular case

$$p^\gamma = u'^\gamma . \quad (1. 13)$$

Substituting from (1. 13) in (1. 10) we get

$$\epsilon^{\alpha\beta} (u'_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + u'_{\gamma,\alpha} u'^{\delta} g_{\gamma\delta} t_{,\beta}) = 0. \quad (1. 14)$$

We know (Eisenhart, 1940, p. 187) that

$$u'_{\gamma,\alpha} u'^{\alpha} = \rho^{\gamma}, \quad (1. 15)$$

where ρ^{γ} is the curvature vector of the curve at x^i .

It can be verified from (1. 15), that

$$u'_{\gamma,\alpha} = \rho^{\gamma} g_{\alpha\delta} u'^{\delta}. \quad (1. 16)$$

With the help of (1. 16), the equation (1. 14) becomes

$$\epsilon^{\alpha\beta} \rho^{\gamma} g_{\alpha\delta} u'^{\delta} g_{\beta\gamma} = 0,$$

$$\text{or,} \quad \epsilon^{\alpha\beta} \rho^{\gamma} u'^{\delta} g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} = 0,$$

$$\text{or,} \quad \rho^{\gamma} u'^{\delta} e_{\delta\gamma} e_{12} = 0, \quad (1. 17)$$

$$\text{where} \quad e_{\gamma\delta} = (X^i x^i_{,\gamma} x^i_{,\delta}). \quad (1. 18)$$

Since (Eisenhart, 1940, p. 187)

$$\rho^{\gamma} u'^{\delta} e_{\delta\gamma} = k_g, \quad (1. 19)$$

where k_g is the geodesic curvature of the curve at x^i , the equation (1. 17) reduces to

$$k_g e_{12} = 0. \quad (1. 20)$$

From the equation (1. 20), if the surface is real (Eisenhart, 1909, p. 71), we must have

$$k_g = 0. \quad (1. 21)$$

Hence the geodesic curvature of the curve at x^i is zero, or the curve is a geodesic.

Thus is established the well-known result (Eisenhart, 1909, p. 401) :

“ The necessary and sufficient condition that the tangents to a family of curves on a surface form a normal congruence is that the curves be geodesics ”.

2. — Suppose

$$E_{\alpha\beta} = (\lambda^i \lambda^i_{,\alpha} \lambda^i_{,\beta}). \quad (2. 1)$$

For the congruence formed by the tangents to S, (2. 1) becomes by virtue of (1. 2),

$$E_{\alpha\beta} = (p^{\sigma} x^i_{,\sigma} x^i_{,\gamma\alpha} p^{\gamma} + x^i_{,\gamma} p^{\gamma}_{,\alpha} x^i_{,\delta\beta} p^{\delta} + x^i_{,\delta} p^{\delta}_{,\beta}),$$

$$\text{or,} \quad E_{\alpha\beta} = (p^{\sigma} x^i_{,\sigma} x^i_{,\gamma\alpha} p^{\gamma} x^i_{,\delta\beta} p^{\delta}) + (p^{\sigma} x^i_{,\sigma} x^i_{,\gamma} p^{\gamma}_{,\alpha} x^i_{,\delta\beta} p^{\delta}), \quad (2. 2)$$

cancelling out the determinants which vanish.

By virtue of (1. 7), the equation (2. 2) takes the form

$$E_{\alpha\beta} = d_{\alpha\gamma} p^\sigma p^\tau p^\delta_{,\beta} (x^i_{,\sigma} X^i x^i_{,\delta}) + d_{\beta\delta} p^\sigma p^\delta p^\tau_{,\alpha} (x^i_{,\sigma} x^i_{,\tau} X^i),$$

which by the use of (1. 18) becomes

$$E_{\alpha\beta} = d_{\alpha\gamma} p^\sigma p^\tau p^\delta_{,\beta} e_{\delta\sigma} + d_{\beta\delta} p^\sigma p^\delta p^\tau_{,\alpha} e_{\sigma\tau}. \quad (2. 3)$$

In the particular case when the congruence is formed by the tangents to a curve on S , the equation (2. 3) takes the form

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= d_{\alpha\gamma} u'^\sigma u'^\tau u'^\delta_{,\beta} e_{\delta\sigma} + d_{\beta\delta} u'^\sigma u'^\delta u'^\tau_{,\alpha} e_{\sigma\tau} \\ &= d_{\alpha\gamma} u'^\sigma u'^\tau \rho^\delta g_{\beta\eta} u'^\eta e_{\delta\sigma} + d_{\beta\delta} u'^\sigma u'^\delta \rho^\tau g_{\alpha\epsilon} u'^\epsilon e_{\sigma\tau}, \end{aligned} \quad (2. 4)$$

in consequence of (1. 13) and (1. 16).

With the help of (1. 19), the equation (2. 4) becomes

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= k_g (g_{\alpha\epsilon} d_{\beta\delta} u'^\delta u'^\epsilon - g_{\beta\eta} d_{\alpha\gamma} u'^\tau u'^\eta) \\ &= k_g u'^\delta u'^\tau (g_{\alpha\gamma} d_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma} d_{\alpha\delta}), \end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad E_{12} = k_g g_{\alpha\gamma} d_{\beta\delta} u'^\tau u'^\delta \epsilon^{\alpha\beta}, \quad (2. 5)$$

$$\text{If} \quad E_{12} = 0, \quad (2. 6)$$

the congruence cannot be represented on a real sphere.

In that case

$$\text{either,} \quad k_g = 0, \quad (2. 7)$$

$$\text{or,} \quad \epsilon^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} d_{\beta\delta} u'^\tau u'^\delta = 0. \quad (2. 8)$$

(2. 7) is satisfied by geodesics (Eisenhart, 1909, p. 133) on the surface and (2. 8) by the lines of curvature (Eisenhart, 1909, p. 121).

Hence if the congruence formed by the tangents to a curve on a surface cannot be represented on a real sphere, the curve is either a geodesic or a line of curvature.

Conversely, the congruence formed by the tangents to a geodesic or a line of curvature cannot be represented on a real sphere.

Combining the above result with the last theorem of § 1 we get the result :

A normal congruence (rectilinear) formed by the tangents to a curve, (which is a geodesic), cannot be represented on a real sphere.

3. — Let $G_{\alpha\beta}$ be the fundamental tensor of the spherical representation of the congruence. It is then given by

$$G_{\alpha\beta} = \lambda^i_{,\alpha} \lambda^i_{,\beta}, \quad (3. 1)$$

Suppose $d\sigma$ is the linear element of the spherical indicatrix of the congruence. Then

$$(d\sigma/ds)^2 = G_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta. \quad (3.2)$$

Taking the covariant differentiation of (1.2) and substituting in (3.1), we get

$$G_{\alpha\beta} = (p^\gamma_{,\alpha} x^i_{,\gamma} + p^\gamma x^i_{,\gamma\alpha}) (p^\delta_{,\beta} x^i_{,\delta} + p^\delta x^i_{,\delta\beta}). \quad (3.3)$$

Use of (1.7) in this equation yields

$$G_{\alpha\beta} = p^\gamma_{,\alpha} p^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}. \quad (3.4)$$

Hence

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = (p^\gamma_{,\alpha} p^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) u'^\alpha u'^\beta. \quad (3.5)$$

In particular, when the congruence is formed by the tangents to a curve on the surface S , the relation (1.13) holds and the equation (3.5) becomes

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 &= (u'^\gamma_{,\alpha} u'^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + u'^\gamma u'^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) u'^\alpha u'^\beta \\ &= u'^\gamma_{,\alpha} u'^\alpha u'^\delta_{,\beta} u'^\beta g_{\gamma\delta} + d_{\gamma\alpha} u'^\gamma u'^\alpha d_{\delta\beta} u'^\delta u'^\beta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Making use of (1.15) and the well-known formula (Eisenhart, 1909, p. 118)

$$k_n = d_{\gamma\alpha} u'^\gamma u'^\alpha, \quad (3.7)$$

where k_n is the normal curvature of the surface in the direction of the curve at x^i , the expression (3.6) becomes

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \rho^\gamma \rho^\delta g_{\gamma\delta} + k_n^2 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{or,} \quad \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 &= k_g^2 + k_n^2 \\ &= k^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

where k is the curvature of the curve at x^i .

$$\frac{d\sigma}{ds} = \pm k.$$

Hence the ratio between the linear element of the spherical indicatrix of a congruence formed by the tangents to a curve on a surface and the

corresponding linear element of the curve is numerically equal to the curvature of the curve at the corresponding point.

4. — The distance of the central point (Behari, 1946) from the surface of reference is given by

$$\begin{aligned}\rho &= - \frac{\mu_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta} \\ &= - \frac{\mu_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta}{G_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

By virtue of (1.9) and (3.5), the equation (4.1) becomes

$$\begin{aligned}\rho &= - \frac{[t(p^\gamma_{,\alpha} p^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) + p^\gamma_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + p^\gamma_{,\alpha} p^\delta g_{\gamma\delta} t_{,\beta}] u'^\alpha u'^\beta}{(p^\gamma_{,\alpha} p^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) u'^\alpha u'^\beta} \\ &= -t - \frac{(p^\gamma_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + p^\gamma_{,\alpha} p^\delta g_{\gamma\delta} t_{,\beta}) u'^\alpha u'^\beta}{(p^\gamma_{,\alpha} p^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) u'^\alpha u'^\beta}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

In the particular case when the tangents to a curve on the surface S form the congruence, the equation (4.2) becomes, in consequence of (1.13)

$$\rho = -t - \frac{(u'^\gamma_{,\alpha} g_{\beta\gamma} + u'^\gamma_{,\alpha} u'^\delta g_{\gamma\delta} t_{,\beta}) u'^\alpha u'^\beta}{(u'^\gamma_{,\alpha} u'^\delta_{,\beta} g_{\gamma\delta} + u'^\gamma u'^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) u'^\alpha u'^\beta}.\quad (4.3)$$

By virtue of (1.15) and (3.7), the equation (4.3) yields

$$\rho = -t - \frac{\rho^\gamma g_{\beta\gamma} u'^\beta + \rho^\gamma u'^\delta g_{\gamma\delta} t_{,\beta} u'^\beta}{\rho^\gamma \rho^\delta g_{\gamma\delta} + k_n^2}.\quad (4.4)$$

But (Eisenhart, 1940, p. 171)

$$g_{\gamma\beta} \rho^\gamma u'^\beta = 0.\quad (4.5)$$

Therefore the equation (4.4) gives

$$\rho = -t.\quad (4.6)$$

Thus the central points of a rectilinear congruence formed by the tangents to a curve on a surface lie at the focal points of the ray.

As the tangents to a curve generate a developable surface, we get the known result (Mishra, 1950) :

The central points for a developable surface through a ray of a rectilinear congruence lie at the focal points of the ray.

5. — Let the surface S be now taken as the surface of reference and r the distance of another focal point from S. Then we have (Krishna, S.)

$$(x_{,1}^i + r\lambda_{,1}^i \quad x_{,2}^i + r\lambda_{,2}^i \quad \lambda^i) = 0. \quad (5.1)$$

Substituting from (1. 2), we get

$$[x_{,1}^i + r(p_{,1}^\gamma x_{,\gamma}^i + p^\gamma x_{,\gamma 1}^i) \quad x_{,2}^i + r(p_{,2}^\delta x_{,\delta}^i + p^\delta x_{,\delta 2}^i) \quad p^\sigma x_{,\sigma}^i] = 0. \quad (5.2)$$

Making use of the equations (1. 7), this equation becomes

$$[x_{,1}^i + r(p_{,1}^\gamma x_{,\gamma}^i + p^\gamma d_{\gamma 1} X^i) \quad x_{,2}^i + r(p_{,2}^\delta x_{,\delta}^i + p^\delta d_{\delta 2} X^i) \quad p^\sigma x_{,\sigma}^i] = 0$$

$$\text{or,} \quad r p^\delta p^\sigma d_{2\delta} (x_{,1}^i X^i x_{,\sigma}^i) + r^2 p_{,1}^\gamma p^\delta p^\sigma d_{2\delta} (x_{,\gamma}^i X^i x_{,\sigma}^i) \\ + r^2 p^\gamma p_{,2}^\delta p^\sigma d_{\gamma 1} (X^i x_{,\delta}^i x_{,\sigma}^i) + r p^\gamma p^\sigma d_{\gamma 1} (X^i x_{,2}^i x_{,\sigma}^i) = 0, \quad (5.3)$$

cancelling out the determinants which vanish.

With the help of (1. 18), the equation (5. 3) reduces to

$$r[p^\sigma p^\delta d_{2\delta} e_{\sigma 1} + p^\gamma p^\sigma d_{\gamma 1} e_{2\sigma} + \\ r(p^\sigma p_{,1}^\gamma p^\delta d_{2\delta} e_{\sigma\gamma} + p^\sigma p_{,2}^\delta p^\gamma d_{\gamma 1} e_{\delta\sigma})] = 0, \quad (5.4)$$

$$\text{whence either,} \quad \gamma = 0 \quad (5.5)$$

$$\text{or,} \quad r = - \frac{p^\sigma p^\gamma d_{2\gamma} e_{\sigma 1} + p^\gamma p^\sigma d_{\gamma 1} e_{2\sigma}}{p^\sigma p_{,1}^\gamma p^\delta d_{2\delta} e_{\sigma\gamma} + p^\sigma p_{,2}^\delta p^\gamma d_{\delta 1} e_{\gamma\sigma}} \\ = - \frac{p^\gamma p^\delta d_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} e^{\alpha\beta}}{p^\sigma p^\delta e_{\sigma\gamma} p_{,\alpha}^\gamma d_{\beta\delta} e^{\alpha\beta}},$$

where $e^{\alpha\beta}$ is a tensor conjugate to $e_{\alpha\beta}$.

$$r = \frac{p^\gamma p^\delta d_{\delta\gamma}}{p^\sigma p^\delta e_{\sigma\gamma} p_{,\alpha}^\gamma d_{\beta\delta} e^{\alpha\beta}}. \quad (5.6)$$

From (5. 5), it is evident that one of the focal points lies on the surface S, while (5. 6) gives the distance of the second focal point from the surface S.

When the congruence is formed by the tangents to a curve on the surface, the equation (5. 6) becomes

$$r = \frac{d_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta}{u'^\sigma u'^\delta e_{\sigma\gamma} u'^\gamma d_{\delta\beta} e^{\alpha\beta}} \\ = \frac{k_n}{u'^\sigma u'^\delta e_{\sigma\gamma} d_{\beta\delta} e^{\alpha\beta} g_{\alpha\psi} p^\gamma u'^\psi}$$

$$= \frac{k_n}{k_g g_{\alpha\gamma} d_{\beta\delta} e^{\alpha\beta} u'^\gamma u'^\delta}$$

$$r = \frac{k_n}{k_g T_g}, \quad (5.7)$$

where T_g is the geodesic torsion (Eisenhart, 1940) of the curve at x^i .

Now combining (5. 5) and (5. 7) we get :

- (i) Both the focal points of a ray of a rectilinear congruence formed by the tangents to an asymptotic line on a surface coincide at the surface.
- (ii) One of the focal points of a ray of a rectilinear congruence formed by the tangents to a geodesic or a line of curvature lies at the surface while the other lies at infinity.

Combining this result with the results of § 2 we have the following results :

- (i) If a rectilinear congruence formed by the tangents to a curve on a surface cannot be represented on a real sphere, then one of the focal points of a ray of the congruence lies at the surface while the other is at infinity.
- (ii) Of the two focal points of a ray of a normal rectilinear congruence formed by the tangents to a curve on a surface one is situated at the surface while the other lies at infinity.

6. — Let the surface S (a focal surface) be taken as the surface of reference. Then the parameter of distribution (Behari, 1946, p. 156) is given by

$$d = \frac{\xi_{x\beta} du^\alpha du^\beta}{G_{x\beta} du^\alpha du^\beta}$$

$$= \frac{\xi_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta}{G_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta}, \quad (6.1)$$

where $\xi_{\alpha\beta}$ are the coefficients of Sannia's second quadratic forms and are given by

$$\xi_{x\beta} = (x^i_{,\alpha} \lambda^i \lambda^i_{,\beta}) \quad (6.2)$$

By virtue of (1. 2), the equation (6. 2) becomes

$$\xi_{\alpha\beta} = (x^i_{,\alpha} x^i_{,\sigma} p^\sigma x^i_{,\gamma\beta} p^\gamma + x^i_{,\gamma} p^\gamma_{,\beta}), \quad (6.3)$$

which by the use of (1. 7) and (1. 18) yields

$$\xi_{\alpha\beta} = p^\sigma p^\gamma d_{\gamma\beta} e_{\alpha\sigma}. \quad (6.4)$$

With the help of (6. 4) and (3. 5), the equation (6. 1) becomes

$$d = \frac{p^\sigma p^\gamma d_{\beta\gamma} e_{\alpha\sigma} u' u'^\beta}{(p^\gamma_\alpha p^\delta_\beta g_{\gamma\delta} + p^\gamma p^\delta d_{\gamma\alpha} d_{\delta\beta}) u'^\alpha u'^\beta} . \quad (6. 5)$$

The equation (6. 5) gives an expression for the parameter of distribution of a congruence formed by the tangents to a surface in terms of the fundamental tensors of the surface.

When the congruence is formed by the tangents to a curve on the surface, (6. 5) gives

$$d = \frac{u'^\sigma u'^\gamma d_{\beta\gamma} e_{\alpha\sigma} u'^\alpha u'^\beta}{k^2} , \quad (6. 6)$$

in consequence of (1. 13), (3. 1) and (3. 9).

By virtue of (3. 7) the equation (6. 6) becomes

$$d = \frac{k_n e_{\alpha\sigma} u'^\alpha u'^\sigma}{k^2} = 0 . \quad (6. 7)$$

i. e., *The parameter of distribution of a congruence formed by the tangents to a curve on a surface vanishes.*

This is also evident from the geometrical consideration that the ruled surface generated by the tangents to a curve on a surface is developable, and hence its parameter of distribution vanishes.

7.— Now we shall find the condition that the surface S be a middle surface of the congruence.

The surface S will be a middle surface if (Mishra, 1951)

$$\epsilon^{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta} = 0 . \quad (7. 1)$$

Taking the surface S as the surface of reference and using (6. 4) we have from (7. 1)

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta} p^\sigma p^\gamma d_{\beta\gamma} e_{\alpha\sigma} &= 0 , \\ p^\alpha p^\beta d_{\alpha\beta} &= 0 . \end{aligned} \quad (7. 2)$$

The equation (7. 2) in terms of the fundamental tensors of the surface S (a focal surface) gives a necessary and sufficient condition that the surface may be a middle surface.

This is also evident from (5. 6). For, the surfaces being a focal surface will be a middle surface, if both the focal points coincide on it, i. e. if

$$p^\gamma p^\delta d_{\gamma\delta} = 0 .$$

In particular if the congruence is formed by the tangents to a curve on the surface S , (1. 13) holds and (7. 2) becomes

$$d_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0 \quad (7. 3)$$

which is an asymptotic line.

Thus, for a rectilinear congruence formed by tangents to a family of curves on a surface, the necessary and sufficient condition that the surface be a middle surface is that the curves are asymptotic lines.

I am grateful to Dr. R. S. Mishra for his keen interest and valuable guidance in the preparation of this paper.

Department of Mathematics,
Lucknow University,
Lucknow (India).

REFERENCES

1. BEHARI, R. (1946), The Differential Geometry of Ruled surfaces. *Lucknow University Studies*, Faculty of Science, XVIII.
 2. BEHARI, R. and MISHRA, R. S. (1949), Some Formulae in Rectilinear Congruences, *Proc. of the National Institute of Sciences of India*, 15 (3), 85-92.
 3. EISENHART, L. P. (1909), Differential Geometry of Curves and Surfaces, Ginn & Co.
 4. EISENHART, L. P. (1940), An Introduction to Differential Geometry, Princeton University Press.
 5. KRISHNA, S. (Under Publication), Some Formulae in Rectilinear Congruences.
 6. MISHRA, R. S. (1950), On Rectilinear Congruences, *Ganita*, I (1), 45-52.
 7. MISHRA, R.S. (1951), Modifications in Sannia's Theory of Line Congruences and some Deductions, *Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul*, 16 (2), 1-7.
-

SESSION DU 30 AVRIL 1952

A BRUXELLES

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

A propos du tranchet d'Archimède

PAR

Victor THEBAULT, Tennie (France)

Nous avons donné ici même plusieurs articles relatifs à cette figure universellement connue et qui sert souvent de thème à des questions d'exams, sans avoir pourtant épuisé le sujet (1). La présente note y revient avec une configuration plus générale que celle envisagée par le géomètre syracusain.

1. Aux extrémités A, B d'une corde donnée d'un cercle (O), de rayon R, on trace deux cercles arbitraires (O₁), (O₂), de rayons R₁, R₂, tangents intérieurement au cercle (O) en A, B, les cercles (ω₁), (ω₂), de rayons ρ₁, ρ₂, tangents, à la fois, aux cercles (O), (O₁), (O₂), puis on pose OO₁ = a, OO₂ = b, θ = (OA, OB), φ = (Oω₁, AB).

THÉORÈME. On a la relation

$$(1) \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\frac{1 + \sin^2 \theta}{R} \right) \right]$$

entre les éléments de la figure.

Dans chacun des triangles Oω₁O₂, Oω₁O₁, on obtient, en effet, d'abord,

$$\begin{aligned} \overline{O_2\omega_1}^2 &= \overline{OO_2}^2 + \overline{O\omega_1}^2 + 2OO_2 \cdot O\omega_1 \cos(\varphi - \theta) \\ \overline{O_1\omega_1}^2 &= \overline{OO_1}^2 + \overline{O\omega_1}^2 - 2OO_1 \cdot O\omega_1 \cos(\varphi + \theta), \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned} a(R - \rho_1) \cos(\varphi + \theta) &= 2R\rho_1 - a(R - \rho_1) \\ - b(R - \rho_1) \cos(\varphi - \theta) &= 2R\rho_1 - b(R - \rho_1), \end{aligned}$$

(1) *Annales*, 1935, t. LV-5; 1950, t. LXIV-5.

puis, en multipliant les deux membres de ces égalités par b et a , en ajoutant et retranchant,

$$ab (R - \rho_1) \sin \varphi \sin \theta = (a + b) R \rho_1 - ab (R + \rho_1)$$

$$ab (R - \rho_1) \cos \varphi \cos \theta = (b - a) R \rho_1,$$

et enfin,

$$\left[\frac{(a + b) R \rho_1 - ab (R + \rho_1)}{ab (R - \rho_1) \sin \theta} \right]^2 + \left[\frac{(b - a) R \rho_1}{ab (R - \rho_1) \cos \theta} \right]^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi =$$

Il en résulte l'équation du second degré en ρ_1

$$[(a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\theta) R^2 - 2ab (a + b) R \cos^2 \theta - (ab \sin \theta \cos \theta)^2] \cdot \rho_1^2 - 2ab R \cos^2 \theta [(a + b) R - ab (1 + \sin^2 \theta)] \cdot \rho_1 + (ab R \cos^2 \theta)^2 = 0 \quad (2)$$

dont les racines donnent les valeurs des rayons ρ_1, ρ_2 des cercles $(\omega_1), (\omega_2)$. Des relations classiques entre la somme et le produit des racines de cette équation, on déduit l'égalité (1) qu'il s'agissait d'établir et qui, pour $\theta = 0$, se réduit à la formule connue ⁽¹⁾

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R},$$

lorsque la corde AB se confond avec un diamètre du cercle (O). (*Tranchet d'ARCHIMÈDE*).

COROLLAIRE. Si la somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ conserve une valeur constante, il en est de même de la somme $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ et, dans cette hypothèse, la droite O_1O_2 passe par un point fixe.

La constance des deux sommes en cause provient de la formule (1). D'autre part, les cercles $(\omega_1), (\omega_2)$ sont les transformés du cercle (O) par l'inversion de module $PA^2 = PB^2$ dont le centre P coïncide avec le pôle de la corde AB par rapport au cercle (O), et la droite O_1O_2 passe par un point fixe situé sur OP.

NOTE. Si l'on considère une sphère (O) de centre O et de rayon R, trois points A, B, C sur cette sphère, trois sphères $(O_1), (O_2), (O_3)$

(1) *Journal de Bourget*, 1878-287, question 113.

tangentes intérieurement à (O) en A, B, C, il existe deux sphères (ω_1) et (ω_2) , de rayons ρ_1 et ρ_2 , qui touchent les quatre sphères (O), (O_1) , (O_2) , (O_3) . Si l'on pose $OO_1 = \lambda$, $OO_2 = \mu$, $OO_3 = \nu$, la condition nécessaire et suffisante pour que la somme $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ soit constante est que λ, μ, ν vérifient la relation

$$\Sigma \frac{1}{\lambda} \sin \text{BOC} (\sin \text{BOC} + \cos \text{OC} \sin \text{AOC} + \cos \text{OB} \sin \text{AOB}) = \text{const.}$$

Les sphères (ω_1) , (ω_2) touchent la sphère (O) aux points de contact de celle-ci avec les plans tangents menés par la droite commune aux plans $O_1O_2O_3$ et ABC. Si le triangle ABC est inscrit à un grand cercle de la sphère (O), les points de contact de celle-ci avec (ω_1) et (ω_2) coïncident avec ceux des plans tangents à (O) menés par l'axe de similitude direct des grands cercles des sphères (O_1) , (O_2) , (O_3) situés dans le plan ABC. Dans cette même hypothèse, la somme $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ reste constante si l'on a

$$\Sigma \frac{\sin \text{BOC}}{\lambda} = \text{constante.}$$

THÉORÈME. Les centres de similitude S_1, S_2 des cercles $(\omega_1), (\omega_2)$ avec le cercle (O), sont situés sur l'axe radical des cercles $(O_1), (O_2)$ et les cercles de centres S_1, S_2 , orthogonaux aux cercles $(O_1), (O_2)$, sont tangents au cercle (O).

Il suffit d'appliquer le théorème de STEWART au triangle $O\omega_1O_1$ et à la céviennne O_1S_1 qui partage le segment $O\omega_1$ dans le rapport $OS_1 : O\omega_1 = R : \rho_1$, pour obtenir, après réductions et par analogie, les expressions

$$(P_1) = \left(\frac{2R\rho_1}{R + \rho_1} \right)^2, \quad (P_2) = \left(\frac{2R\rho_2}{R + \rho_2} \right)^2$$

des puissances des points S_1, S_2 par rapport aux cercles $(O_1), (O_2)$. De plus, les rayons des cercles de centres S_1, S_2 orthogonaux aux cercles $(O_1), (O_2)$ ont pour mesures

$$\frac{2R\rho_1}{R + \rho_1} = R - \frac{R(R - \rho_1)}{R + \rho_1} = R - OS_1 \text{ et } R - OS_2,$$

ce qui achève d'établir la proposition.

THÉORÈME. Si l'on trace des cercles (O_1) , (O_2) tangents au cercle (O) en A, B, puis des cercles (O'_1) , (O'_2) tangents au cercle (O) en A, B, de manière que $OO_2 = AO'_1$, $OO_1 = BO'_2$, les cercles tangents aux cercles (O) , (O_1) , (O_2) et (O) , (O'_1) , (O'_2) sont tangents au cercle (O) aux mêmes points.

En effet, les points de contact du cercle (O) avec les cercles (ω_1) , (ω_2) tangents aux cercles (O) , (O_1) , (O_2) coïncident avec les contacts des tangentes au cercle (O) menées par le point $S \equiv (AB, O_1O_2)$ avec celui-ci qui se confondent nécessairement avec les points de contact du cercle (O) avec les cercles (ω'_1) , (ω'_2) tangents aux cercles (O) , (O'_1) , (O'_2) , car les points A, B étant antihomologues sur les cercles (O_1) et (O_2) , (O'_1) et (O'_2) , les droites AB, O_1O_2 , $O_1'O_2$ sont concourantes.

2. Dans ce qui suit, on suppose que le cercle (O) et la corde AB restent fixes tandis que les cercles (O_1) , (O_2) sont variables et se coupent en un point C qui se déplace sur la corde AB entre A et B.

Dans ces hypothèses, il est clair que les cercles (O_1) , (O_2) se rencontrent sous l'angle constant $(OB, AO) = 2\theta$. D'autre part, dans l'inversion i de pôle A, dont la puissance est $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, les points B, C s'échangent, le cercle (O_2) se transforme en lui-même tandis que les cercles (O_1) , (O) se changent en deux droites Bx, Cy perpendiculaires à la droite AO, dont la première coupe le cercle (O_2) sous l'angle 2θ alors que la seconde est tangente au cercle (O_2) en C; les cercles (ω_1) et (ω_2) tangents aux cercles (O) , (O_1) , (O_2) se transforment en deux cercles égaux (ω'_1) et (ω'_2) de rayon $\rho'_1 = \rho'_2$ tangents au cercle (O_2) et aux droites Bx, Cy.

THÉORÈME. Les cercles (ω_1) , (ω_2) enveloppent le cercle (O) et, chacun, un cercle (Γ_1) , (Γ_2) et leurs centres ω_1, ω_2 décrivent, chacun, une ellipse ayant pour foyer commun le centre O du cercle (O) et pour second foyer le centre Γ_1, Γ_2 du cercle (Γ_1) , (Γ_2) correspondant.

Il suffira d'examiner ce qui se passe pour le cercle (ω_1) . Si l'on désigne par D, F les points de rencontre de la droite O_2C avec la droite Bx et la parallèle à celle-ci menée par le centre ω'_1 du cercle (ω'_1) , on obtient d'après ce qui précède, les égalités

$$O_2D = R_2 \cos 2\theta, \rho'_1 = \frac{R_2}{2} (1 \pm \cos 2\theta), O_2F = \frac{R_2}{2} (1 - \cos 2\theta),$$

d'où il résulte que le rapport $\frac{O_2 F}{O_2 \omega'_1}$ et, par suite, le rapport $\frac{FC}{F \omega'_1}$ conservent des valeurs constantes. Le triangle $O_2 \omega'_1 C$ reste donc semblable à lui-même quand le point C varie sur AB .

L'inversion i intervertit les points B et C et dans cette seconde figure, si A et B sont des points fixes, le centre ω'_1 du cercle (ω'_1) décrit une droite fixe Bt_1 passant par B . La seconde tangente Bu_1 à ce cercle est donc fixe. Dès lors, dans la figure initiale, lorsque C varie entre A et B , le cercle (ω_1) reste tangent aux deux cercles fixes (O) , (Γ_1) passant par A et B et inverses des droites $By \equiv Cy$ et Bu_1 . Puisque le cercle (ω_1) touche le cercle (O) intérieurement et le cercle (Γ_1) extérieurement, son centre ω_1 décrit une ellipse (E_1) de foyers O et Γ_1 . Il est évident que les enveloppes du cercle (ω_1) et le lieu de son centre ω_1 sont composés des arcs des cercles (O) , (Γ_1) et de l'ellipse (E_1) situés au-dessus de AB .

COROLLAIRE. *Le cercle (γ) transformé d'une droite quelconque $B\Delta$ située à l'intérieur de l'angle des tangentes By , Bu_1 au cercle (ω'_1) de la seconde figure, par l'inversion i , rencontre les cercles correspondants (ω_1) de la première sous un même angle lorsque C varie entre A et B . Car la droite $B\Delta$ rencontre les cercles (ω'_1) sous un même angle. En particulier, le cercle (γ) qui correspond à la droite Bt_1 coupe orthogonalement tous les cercles (ω_1) lorsque C varie entre A et B .*

3. Supposons maintenant que le point C reste fixe entre A et B et modifions légèrement les notations. Soient (ω_1) , (ω_2) , ..., (ω_n) les cercles de rayons ρ_1 , ρ_2 , ..., ρ_n tangents respectivement aux ternes de cercles $[(O), (O_1), (O_2)]$, $[(O), (O_1), (\omega_1)]$, $[(O), (O_1), (\omega_2)]$, ..., $[(O), (O_1), (\omega_{n-1})]$.

THÉORÈME. *Le centre ω_k , ($1 \leq k \leq n$), de l'un des cercles de la couronne (ω_1) , (ω_2) , ..., (ω_n) , décrit une ellipse (E_k) ayant pour foyers les centres des cercles (O) , (O_1) et un sommet en A .*

Car

$$OO_k + O_1 O_k = R - \rho_k + R_1 + \rho_k = R + R_1.$$

Les centres des cercles de la couronne déterminée par les cercles (O) , (O_1) , au-dessous de AB , sont aussi sur l'ellipse (E_1) . Ceux des cercles des couronnes relatives aux cercles (O) , (O_2) , au-dessus et au-dessous de AB , appartiennent à une ellipse (E_2) de foyers O , O_2 ayant un sommet en B .

NOTE. 1^o Si l'on transforme la figure par l'inversion i de pôle A dont le module est $\overline{AB \cdot AC}$, les cercles (ω_n) se changent en des cercles égaux (ω'_n) dont les centres sont alignés sur une perpendiculaire à AO. Le cercle (γ) transformé d'une droite arbitraire comprise entre les tangentes By et Bu₁ à ces cercles rencontre les cercles (ω_n) sous un même angle. En particulier, le transformé de leur droite des centres Bt₁ est un cercle orthogonal aux cercles (ω_n) .

2^o Lorsque le point C varie entre A et B, les cercles (ω_n) , (3), se transforment par l'inversion i en une suite de cercles (ω'_n) dont le cercle (ω'_1) , (2), fait partie. La tangente Bu_k relative au cercle (ω'_k) , de rang k , de cette suite est fixe, de sorte que le cercle (ω_k) qui lui correspond dans la figure initiale, (2), enveloppe le cercle (O) et un cercle (Γ_k) passant par A et B dont le centre ω_k décrit une ellipse (E_k) de foyers O et Γ_k .

4. TRANCHET D'ARCHIMÈDE. Tout ce qui précède s'applique à la figure dans laquelle la corde AB devient un diamètre du cercle (O). Certaines des propriétés invoquées présentent un intérêt particulier. Ainsi, en conservant les notations du paragraphe 3, on obtient cette proposition : *Les cercles (ω_n) sont orthogonaux au cercle décrit sur la distance du point A à son conjugué harmonique A' par rapport aux points C et B, comme diamètre, et le cercle décrit sur un segment arbitraire AI, dont l'extrémité I est entre A et A', comme diamètre, coupe les cercles (ω_n) sous un même angle.*

Pour terminer, cette allusion au tranchet d'ARCHIMÈDE nous incite à rappeler un triangle spécial dont nous avons établi de très nombreuses propriétés (1). En se rapportant à deux axes rectangulaires suivant les diamètres perpendiculaires AB, A₁B₁ du cercle (O), si on considère deux cercles arbitraires (O₁), (O₂) tangents intérieurement au cercle (O) en A et B, tels que OO₁ = a , OO₂ = b , on obtient les coordonnées

$$(3) \quad X_R = \frac{(a-b)(2R-a-b)R}{(a+b)R-ab}, \quad Y_R = R - \frac{(a^2+b^2)R}{(a+b)R-ab},$$

$$(4) \quad X_\omega = \frac{(a-b)R^2}{(a+b)R-ab}, \quad Y_\omega = \frac{2R\sqrt{ab(R-a)(R-b)}}{(a+b)R-ab},$$

(1) Ces propriétés figurent, dans la bibliographie de ce triangle spécial que nous avons donnée récemment (*Bull. de la Soc. Roy. des Sciences de Liège*, 1950-574). Voir aussi *Mathesis*, LX-287.

de l'orthocentre H du triangle PQV dont les sommets P, Q et V coïncident avec les milieux des demi-circonférences (O_1) , (O_2) , au-dessus de AB, de la demi-circonférence (O) , au-dessous de AB, et du centre ω du cercle (ω) tangent aux demi-cercles (O) , (O_1) , (O_2) , au-dessus de AB.

Dans le tranchet, où $a + b = R$, on obtient $X_H = X_\omega$ et, d'après (3) et (4), la droite ωH qui joint le centre du cercle inscrit au tranchet à l'orthocentre du triangle PQV est perpendiculaire à AB et réciproquement.

(Octobre 1950).

* * *

Dans une note récente ⁽¹⁾, nous avons établi que le conjugué isogonal du point de rencontre de la droite d'EULER OH d'un triangle $T \equiv ABC$, par rapport à celui-ci, avec l'hyperbole de FEUERBACH correspondant au centre I du cercle inscrit, se confond avec l'orthocentre h du triangle podaire de I pour le triangle T; il en est de même des inverses normaux des points de rencontre de OH avec les hyperboles de FEUERBACH correspondant aux centres I_a, I_b, I_c des cercles exinscrits qui coïncident avec les orthocentres h_a, h_b, h_c des triangles podaires des points I_a, I_b, I_c , et réciproquement. Par suite, les orthocentres h, h_a, h_b, h_c appartiennent à l'hyperbole de JERABEK (J) du triangle fondamental. Cette propriété résulte aussi de ce que les coordonnées normales

$$\cos B + \cos C, \quad \cos C + \cos A, \quad \cos A + \cos B, \quad (2)$$

$$\cos B + \cos C, \quad \cos A - \cos C, \quad \cos A - \cos B,$$

$$\cos B - \cos C, \quad \cos C + \cos A, \quad \cos B - \cos A,$$

$$\cos C - \cos B, \quad \cos C - \cos A, \quad \cos A + \cos B,$$

des points h, h_a, h_b, h_c vérifient l'équation

$$\Sigma \frac{b^2 - c^2}{X} \cos A = 0$$

de (J).

(1) *Annales*, 1951, t. 65, p. 8.

(2) GALLATHY, *Modern pure Geometry*, p. 19.

Les points h, h_a, h_b, h_c sont des *dérivés* du centre O du cercle ABC et leurs coordonnées normales proviennent des coordonnées $(\cos A, \cos B, \cos C)$ de O suivant une loi fort simple. Il y a lieu d'observer que les dérivés de l'orthocentre H suivant la même loi et dont les coordonnées normales sont

$$\begin{aligned} & \cos B^{-1} + \cos C^{-1}, \quad \cos C^{-1} + \cos A^{-1}, \quad \cos A^{-1} + \cos B^{-1}, \\ & \cos B^{-1} + \cos C^{-1}, \quad \cos A^{-1} - \cos C^{-1}, \quad \cos A^{-1} - \cos B^{-1}, \dots \end{aligned}$$

appartiennent aussi à l'hyperbole de JERABEK. Plus généralement, on obtient cette proposition : *les dérivés*

$$\begin{aligned} M & \quad \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta \\ M_a & \quad \beta + \gamma, \alpha - \gamma, \alpha - \beta \\ M_b & \quad \beta - \gamma, \gamma + \alpha, \beta - \alpha \\ M_c & \quad \gamma - \beta, \gamma - \alpha, \alpha + \beta, \end{aligned}$$

d'un point P de coordonnées normales (α, β, γ) , par rapport à un triangle $T \equiv ABC$, appartiennent à la conique (C) transformée isogonale de la droite PP' joignant le point P à son conjugué isogonal $P' \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \right)$, de même que les dérivés du point P'.

On peut ajouter que le triangle $M_a M_b M_c$ est circonscrit à celui dont les sommets coïncident avec les pieds des céviennes du point P'. Ainsi, le triangle $h_a h_b h_c$ est circonscrit au triangle orthique de T.

Enfin, au sens indiqué, les dérivés de deux points inverses normaux situés sur la cubique de MAC CAY d'un triangle sont huit points d'une hyperbole équilatère circonscrite à celui-ci.

Un exemple simple de produit indéfini de facteurs primaires dont les zéros sont les racines d'équations récurrentes

PAR

R.H. GERMAY

§ 1. Considérons l'équation du second degré

$$(1) \quad x^2 + p_0 x + q_0 = 0$$

dont les racines α_0, β_0 sont réelles et distinctes. Supposons

$$(2) \quad \alpha_0 < \beta_0$$

Soient a et b deux nombres réels tels que

$$(3) \quad a < \alpha_0 < \beta_0 < b$$

Désignons par λ_0 une quantité réelle positive. Considérons l'équation

$$(4) \quad x^2 + p_0 x + q_0 + \lambda_0 (x - a)(x - b) = 0$$

Les racines α_1, β_1 de cette équation sont réelles et distinctes; elles donnent lieu aux inégalités

$$(5) \quad a < \alpha_1 < \alpha_0 < \beta_0 < \beta_1 < b$$

On le voit de suite par la simple application de la règle des signes d'un trinôme du second degré.

L'équation (4) s'écrit

$$(6) \quad x^2 + p_1 x + q_1 = 0$$

moyennant les abréviations

$$(7) \quad p_1 = \frac{p_0 - \lambda_0 (a + b)}{1 + \lambda_0}, \quad q_1 = \frac{q_0 + \lambda_0 ab}{1 + \lambda_0}$$

Désignons encore par λ_1 un nouveau nombre positif. Formons l'équation

$$(8) \quad x^2 + p_1 x + q_1 + \lambda_1 (x - a)(x - b) = 0$$

Ses racines α_2, β_2 sont réelles et distinctes et donnent lieu aux relations d'inégalité

$$(9) \quad a < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0 < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$$

L'équation (8) s'écrit

$$(10) \quad x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

moyennant

$$(11) \quad p_2 = \frac{p_1 - \lambda_1(a+b)}{1 + \lambda_1}, \quad q_2 = \frac{q_1 + \lambda_1 ab}{1 + \lambda_1}$$

Le procédé peut être continué indéfiniment.

La suite indéfinie de nombres positifs

$$(12) \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots$$

étant *arbitrairement choisie*, on construit de proche en proche une suite indéfinie d'équations

$$(13) \quad x^2 + p_0x + q_0 = 0, \dots, x^2 + p_nx + q_n = 0, x^2 + p_{n+1}x + q_{n+1} = 0, \dots$$

Les coefficients de l'équation

$$(14) \quad x^2 + p_{n+1}x + q_{n+1} = 0$$

sont liés à ceux de la précédente par les formules récurrentes

$$(15) \quad p_{n+1} = \frac{p_n - \lambda_n(a+b)}{1 + \lambda_n}, \quad q_{n+1} = \frac{q_n + \lambda_n ab}{1 + \lambda_n}$$

Les racines $\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_n, \beta_n, \alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \dots$ de ces équations sont réelles et distinctes. Elles donnent lieu aux relations d'inégalité

$$(16) \quad a < \dots < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \dots < \alpha_1 < \alpha_0 < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \beta_{n+1} < \dots < b$$

Les suites indéfinies

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots \end{array} \right.$$

sont convergentes et ont pour limites respectives des nombres A et B tels que

$$(18) \quad a \leq A, \quad B \leq b$$

lorsque n augmente indéfiniment.

Il en résulte que les coefficients p_n, q_n ont aussi des limites quand n tend vers l'infini. En effet

$$(19) \quad \alpha_n + \beta_n = -p_n, \quad \alpha_n \beta_n = q_n$$

Dès lors

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = -(A + B) = P, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = AB = Q$$

Les équations (13) elles-mêmes ont pour limite l'équation

$$(21) \quad x^2 + Px + Q = 0$$

dont les racines sont évidemment A et B.

Dans ce qui suit, afin de ne pas multiplier les notations, nous désignerons indifféremment par le même symbole, un point géométrique et le nombre réel ou complexe qui lui correspond.

§ 2. Prenons l'origine des axes coordonnés au milieu O du segment AB situé sur l'axe réel. Les valeurs des racines α_n, β_n , des coefficients p_n, q_n sont modifiées par ce changement d'origine; mais les positions respectives des points représentatifs des racines ne le sont pas.

Pour ne pas multiplier les notations, nous continuerons à appeler $\alpha_n, \beta_n, p_n, q_n$ les valeurs des racines et celles des coefficients. Les α_n, β_n sont des points de l'axe réel tendant respectivement vers les points A et B de cet axe quand n augmente indéfiniment. Décrivons le cercle (Γ) du centre O et de diamètre AB.

Les points α_n, β_n satisfont aux conditions requises pour l'application d'un résultat de E. Picard « *Sur la décomposition en facteurs primaires de fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels* » (*). Toutefois, il est inutile de résoudre les équations (13) pour écrire le produit indéfini de facteurs primaires représentant la fonction analytique qui, dans le cercle (Γ) a les zéros α_n, β_n . Il suffit de reprendre le raisonnement classique utilisé dans ce genre de questions.

Soit ε une quantité positive aussi petite qu'on le veut et, en tous les cas, inférieure au rayon R du cercle (Γ). Appelons (γ) le cercle de centre O et de rayon

$$(22) \quad \rho = R - \varepsilon$$

(*) Voir sous ce titre : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 92, p. 690 ou *Traité d'Analyse*, 2^e éd., 1905, t. II, chap. V, § 36, p. 150.

ε étant de plus choisi de manière que (γ) ne passe par aucun des points α_n, β_n . Supposons le point z intérieur au cercle (γ) . A partir d'un certain rang $N + 1$, les α_n, β_n sont dans la couronne circulaire comprise entre (γ) et (Γ) , N étant un nombre entier positif associé à ε . Considérons les expressions

$$(23) \quad 1 - \frac{(z^2 + Pz + Q) - (z^2 + p_n z + q_n)}{z^2 + Pz + Q} = \frac{z^2 + p_n z + q_n}{z^2 + Pz + Q} = 1 - u_n$$

moyennant

$$(24) \quad u_n = \frac{(P - p_n)z + (Q - q_n)}{z^2 + Pz + Q}$$

Cette expression ne s'annule que pour

$$(25) \quad z = \alpha_n, \quad z = \beta_n$$

Ecrivons le produit indéfini

$$(26) \quad \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^2 + p_n z + q_n}{z^2 + Pz + Q} e^{\Phi_{\mu_n}(u_n)} = \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 - u_n) e^{\Phi_{\mu_n}(u_n)}$$

où $\Phi_{\mu_n}(u_n)$ désigne une certaine expression polynomiale en u_n .

Décomposons ce produit indéfini en deux parties

$$(23) \quad \prod_{n=0}^{n=N} \frac{z^2 + p_n z + q_n}{z^2 + Pz + Q} e^{\Phi_{\mu_n}(u_n)}, \quad \prod_{n=N+1}^{n=\infty} \frac{z^2 + p_n z + q_n}{z^2 + Pz + Q} e^{\Phi_{\mu_n}(u_n)}$$

La première de ces expressions est une fonction holomorphe dans (γ) , ayant les zéros $\alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta_0, \dots, \beta_N$ situés dans (γ) .

La seconde est un produit indéfini dont il faut démontrer la convergence absolue et uniforme.

Le dénominateur commun des facteurs primaires ne s'annule pas dans (γ) ; il reste supérieur en module à un certain nombre positif M .

On a

$$(24) \quad |u_n| < \frac{|P - p_n| |z| + |Q - q_n|}{|z^2 + Pz + Q|} < \frac{\varepsilon' R + \varepsilon'}{M}$$

pour $n > N^*$, associé à ε' indépendant de z . Le nombre positif arbitrairement petit ε' peut lui-même être choisi de manière que

$$(25) \quad \frac{\varepsilon'(R + 1)}{M} < \alpha < 1$$

Posons, suivant le procédé classique,

$$(26) \quad 1 + W_n = (1 - u_n) e^{\frac{Q\mu_n(u_n)}{1 - u_n} \cdot \log(1 - u_n) + Q\mu_n(u_n)} = e$$

la branche du logarithme étant celle qui se réduit à zéro quand son argument devient l'unité. Écrivons encore

$$(27) \quad Q\mu_n(u_n) = \frac{u_n}{1} + \frac{u_n^2}{2} + \dots + \frac{u_n^{\mu_n}}{\mu_n}$$

Il vient successivement

$$(28) \quad 1 + W_n = (1 - u_n) e^{\frac{Q\mu_n(u_n)}{1 - u_n} \cdot \frac{u_n^{\mu_n+1}}{\mu_n+1} - \dots} = e$$

$$(29) \quad |W_n| \leq e^{\frac{|u_n|^{\mu_n+1}}{\mu_n+1} + \dots} + 1$$

$$(30) \quad |W_n| < \left\{ \frac{|u_n|^{\mu_n+1}}{\mu_n+1} + \frac{|u_n|^{\mu_n+2}}{\mu_n+2} + \dots \right\} e^{\frac{|u_n|^{\mu_n+1}}{\mu_n+1} + \frac{|u_n|^{\mu_n+2}}{\mu_n+2} + \dots}$$

$$(31) \quad |W_n| < \frac{\alpha^{\mu_n+1}}{\mu_n+1} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot e^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Il suffit de prendre

$$(32) \quad \mu_n + 1 = n$$

pour que la série

$$(33) \quad \sum_{n=N^*}^{n=\infty} W_n$$

soit absolument et uniformément convergente.

Le produit indéfini

$$(34) \quad \prod_{n=N+1}^{n=\infty} \frac{z^2 + p_n z + q_n}{z^2 + Pz + Q} e^{\frac{Q\mu_n(u_n)}{1 - u_n} \cdot \log(1 - u_n) + Q\mu_n(u_n)}$$

converge absolument et uniformément, puisque l'adjonction éventuelle des facteurs numérotés de $N+1$ à N^*+1 ne change rien

à cette convergence. La différence ε des rayons des cercles (γ) et (Γ) est aussi petite que l'on veut. Le produit indéfini

$$(35) \quad \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^2 + p_n z + q_n}{z^2 + Pz + Q} e^{Q\mu_n(u_n)}$$

est une fonction analytique régulière dans (Γ) ayant pour zéros les points $\alpha_n, \beta_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$.

§ 3. — *Remarque.* — Les racines de l'équation

$$(36) \quad x^2 + p_1 x + q_1 = 0$$

sont des fonctions du paramètre λ_1 ; celles de l'équation

$$(37) \quad x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

dépendent des paramètres λ_1, λ_2 ; en général, celles de l'équation

$$(38) \quad x^2 + p_n x + q_n = 0$$

dépendent des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ainsi, dans le cercle correspondant aux valeurs (12) où son existence est assurée, la fonction (35) peut être considérée comme dépendant d'une infinité de paramètres

$$(39) \quad 0 < \lambda_0 \leq L_0, \quad 0 < \lambda_1 \leq L_1, \quad \dots \quad 0 < \lambda_n \leq L_n, \quad \dots$$

Les zéros de cette fonction peuvent être renfermés dans une couronne circulaire aussi mince qu'on le veut. Par exemple si $\lambda_1 \rightarrow +\infty$, α_1, β_1 et dès lors $\alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n \dots$ tendent respectivement vers a et b quelles que soient d'ailleurs les valeurs de $\lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$. En général, si $\lambda_n \rightarrow +\infty$, alors que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, ont des valeurs fixées, les racines α_n, β_n et celles des équations suivantes tendent respectivement vers a et b quelles que soient les valeurs des paramètres $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$.

Moyennant quelques changements d'écriture, on peut encore généraliser les résultats ci-dessus en faisant tourner autour de O les points α_n, β_n d'un angle arbitraire θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

A Note on Meijer Transform

BY

J. P. JAISWAL

1. The integral

$$(1) \quad \Phi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} st} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) f(t) dt,$$

was given by Meijer (1941). We denote (1) symbolically as

$$f(t) \xrightarrow[k+\frac{1}{2}}{m} \Phi(s).$$

If $k = \pm m$, (1) reduces to Laplace Integral, due to the identity

$$(st)^{-m-\frac{1}{2}} W_{m+\frac{1}{2}, m}(st) \equiv e^{-\frac{1}{2} st}.$$

Other particular cases of Meijer Transform are :

(a) When $k = -\frac{1}{2}$, (1) reduces to (*)

$$(2) \quad \Phi(s) = \frac{s}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} st} (st)^{\frac{1}{2}} K_m\left(\frac{1}{2} st\right) f(t) dt,$$

and will be known as K_m -transform and symbolically denoted as

$$f(t) \xrightarrow[m]{0} \Phi(s).$$

(b) When $k = \frac{1}{2} n - \frac{1}{4}$, $m = \pm \frac{1}{4}$, (1) reduces to

$$(3) \quad \Phi(s) = 2^{-\frac{n}{2}} s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} st} (st)^{-\frac{1}{2} n} D_n(\sqrt{2st}) f(t) dt,$$

(*) $K_m(z)$, $D_n(z)$, and $L_n^a(z)$ are Bessel function, parabolic cylinder function, and generalised Laguerre polynomial respectively.

and will be denoted as D_n -transform and symbolically denoted as

$$f(t) \xrightarrow[\pm \frac{1}{4}]{\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}} \Phi(s).$$

(c) When $k = \frac{1}{2}n + l$, and $m = \pm \frac{1}{2}n$, (1) reduces to

$$(4) \quad \Phi(s) = (-)^l l! \int_0^\infty e^{-st} (st)^{-l} L_l^n(st) f(t) dt,$$

where l is a positive integer, and will be known as L_l^n -transform, and symbolically denoted as

$$f(t) \xrightarrow[\pm \frac{n}{2}]{\frac{1}{2}n + l + \frac{1}{2}} \Phi(s).$$

In this paper (*), we have established a property of Meijer transform. Its particular case, in the Laplace transform is a known result of (Bose, 1952). The theorem has been illustrated by examples, in § 3.

2. THEOREM

If

$$x^{v-1} h(x) \xrightarrow[m]{k + \frac{1}{2}} \Phi(p),$$

$$h(p) \stackrel{\circ}{=} f(x) \text{ and } p^{1-\lambda} f(p) \stackrel{\circ}{=} g(x),$$

then

$$(5) \quad \Phi(p) = \int_0^\infty g(s) \chi(p, s) ds$$

(*) The following symbols have been used in this paper

(I) $\Gamma_*(\alpha \pm \beta)$ denotes $\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha - \beta)$;

(II) ${}_2F_1 \left[\begin{smallmatrix} \alpha \pm \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}; x \right]$ denotes ${}_2F_1 \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha + \beta, \alpha - \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}; x \right\}$.

where

$$\chi(p, s) = \frac{\Gamma_*(\nu - k + 1 \pm m)}{p^\nu \Gamma(\nu + 1 - 2k)} \int_0^\infty e^{-ts} t^\lambda {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu - k + 1 \pm m \\ \nu - 2k + 1 \end{matrix} ; -\frac{t}{p} \right] dt,$$

provided $R(\lambda) > -1$, $R(\nu - k + 1 \pm m) > 0$, $R(p) > 0$, $g(s)$ is bounded, the Laplace transform of $|g(s)|$ exists and the integral in (5) is absolutely convergent.

PROOF :

We have

$$(6) \quad \Phi(p) = p \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} px} (px)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m}(px) x^{\nu-1} h(x) dx$$

$$(7) \quad h(x) = x \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt, \text{ and}$$

$$(8) \quad t^{1-\lambda} f(t) = t \int_0^\infty e^{-st} g(s) ds.$$

Substituting the value of $f(t)$ from (8) in (7), and after changing the order of integration, we obtain

$$(9) \quad h(x) = x \int_0^\infty g(s) \left\{ \int_0^\infty e^{-st} t^\lambda \cdot e^{-xt} dt \right\} ds.$$

Now, substituting the value of $h(x)$ from (9) in (6), we obtain

$$(10) \quad \Phi(p) = p \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} px} (px)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m}(px) x^{\nu-1} \left[x \int_0^\infty g(s) \left\{ \int_0^\infty e^{-st} t^\lambda e^{-xt} dt \right\} ds \right] dx \\ = \int_0^\infty g(s) \left[\int_0^\infty e^{-st} t^\lambda \left\{ p \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} px} (px)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m}(px) x^\nu e^{-xt} dx \right\} dt \right] ds$$

On evaluating the x -integral by a known Meijer transform (Jaiswal, 1952).

$$x^\nu e^{-tx} \frac{k + \frac{1}{2}}{m} \rightarrow \frac{\Gamma_*(\nu - k + 1 \pm m)}{\Gamma(\nu - 2k + 1) p^\nu} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu - k + 1 \pm m \\ \nu - 2k + 1 \end{matrix} ; -\frac{t}{p} \right] \\ R(\nu - k + 1 \pm m) > 0 \text{ and } R(p) > 0,$$

we get

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} g(s) \chi(p, s) ds$$

where

$$\chi(p, s) = \frac{\Gamma_*(\nu - k + 1 \pm m)}{\Gamma(\nu - 2k + 1)p^\nu} \int_0^{\infty} e^{-st} t^\lambda {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu - k + 1 \pm m \\ \nu - 2k + 1 \end{matrix}; -\frac{t}{p} \right] dt$$

Regarding the change of order of integration in (9), we suppose that

$$\begin{aligned} \psi(s, x) &= g(s) \int_0^{\infty} e^{-st} t^\lambda e^{-xt} dt \\ &= g(s) g_1(s, x) \end{aligned}$$

where $g_1(s) = 0$ (1) for small s .

It is evident that $\psi(s, x)$ is uniformly convergent in $s \geq 0$, if $R(\lambda) > -1$, $x > 0$ and $g(s)$ is bounded in $s \geq 0$. Again, consider the integral

$$I = \int_A^{\infty} e^{-xt} t^\lambda \left[\int_0^{\infty} e^{-st} |g(s)| ds \right] dt$$

where A is large.

Now, for large values of t , I does not exceed a constant multiple of

$$\int_A^{\infty} e^{-xt} t^\lambda \left[\int_0^{\infty} e^{-st} |g(s)| ds \right] dt$$

which tends to zero, if $x > 0$ and the integral $\int_0^{\infty} e^{-st} |g(s)| ds$ is convergent.

Hence the change of order of integration in (9) is justified.

In order to justify the second change of order of integration in (10), we will first justify the change of order of s -integral and x -integral in

$$p \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} px} (px)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m}(px) x^\nu \left[\int_0^{\infty} \psi(s, x) ds \right] dx$$

Here x -integral is uniformly and absolutely convergent if $R(\nu - k + 1 \pm m) > 0$ and $R(p) > 0$; s -integral is uniformly and absolutely convergent under the conditions mentioned in the change of order of integration of (9), and the repeated integral is absolutely convergent

due to the absolute convergence of (5). Therefore the change of order of integration is justified by de La Vallée Poussins Theorem (Bromwich, 1908).

Next, we will justify the change of order of t -integral and x -integral in

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} p x} (p x)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m} (p x) x^{\nu} \left[\int_0^{\infty} e^{-(s+x)t} t^{\lambda} dt \right] dx$$

We note that t -integral is absolutely and uniformly convergent if $R(\lambda) > -1$ and $s > 0$ and x -integral is absolutely and uniformly convergent if $R(\nu \pm m - k + 1) > 0$, $R(p) > 0$, and the repeated integral is uniformly and absolutely convergent if $R(\nu \pm m - k + 1) > 0$ and $R(p) > 0$. Therefore the change of order of integration is justified.

Hence the change of order of integration in (10) holds under the conditions mentioned above.

2.-1. COROLLARY

If $k = m$, the theorem reduces to (Bose, for $\mu = 1$).

If

$$\Phi(p) \stackrel{\cdot}{=} x^{\nu-1} h(x),$$

$$h(p) \stackrel{\cdot}{=} f(x) \text{ and } p^{1-\lambda} f(p) \stackrel{\cdot}{=} g(x),$$

then

$$\Phi(p) = \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\lambda+1)}{p^{\frac{1}{2}(\nu-\lambda+1)}} \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2} s p} s^{\frac{1}{2}(\nu-\lambda-1)} g(s) W_{-\frac{1}{2}(\lambda+\nu+1), \frac{1}{2}(\lambda-\nu)} (s p) ds$$

provided $R(\nu+1) > 0$, $R(\lambda+1) > 0$, λ is not an integer, $g(s)$ is bounded and the Laplace transform of $|g(s)|$ exists, and the integral is absolutely convergent.

3. EXAMPLE

If

$$g(s) = s^n,$$

then

$$t^{1-\lambda} f(t) = \Gamma(n+1) t^{-n}, \quad R(n+1) > 0$$

or

$$f(t) = \Gamma(n+1) t^{\lambda-n-1}$$

$$\frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\lambda-n)}{x^{\lambda-n-1}}, \quad R(\lambda-n) > 0.$$

$$= h(x)$$

therefore

$$x^{v-1} h(x) = \Gamma(n+1) \Gamma(\lambda-n) x^{v-\lambda+n}$$

Now by the known result (Jaiswal, 1952)

$$x^n \xrightarrow{m} \frac{k + \frac{1}{2}}{m} \rightarrow \frac{\Gamma_*(n-k+1 \pm m)}{\Gamma(n-2k+1)} p^{-n}, \quad R(n-k+1 \pm m) > 0 \text{ and } R(p) > 0,$$

we get

$$\Phi(p) = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\lambda-n) \Gamma_*(v-\lambda+n-k+1 \pm m)}{\Gamma(v-\lambda+n-2k+1)} p^{\lambda-v-n}$$

$$R(v-\lambda+n-k+1 \pm m) > 0 \text{ and } R(p) > 0.$$

Hence by the theorem, we have

$$\int_0^\infty s^n \chi(p, s) ds = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\lambda-n) \Gamma_*(v-\lambda+n-k+1 \pm m)}{\Gamma(v-\lambda+n-2k+1) p^{v-\lambda+n}}$$

provided $R(n+1) > 0$, $R(v-k+1 \pm m) > R(\lambda-n) > 0$, λ is not an integer, $R(\lambda) > -1$ and $R(p) > 0$.

I am thankful to Dr. S.K. Bose of the Lucknow University for his help in the preparation of this paper.

REFERENCES

- BOSE, S.K. (1952) «Some Sequences of Laplace Transform». To appear in the *Bull. Calcutta Math. Soc.*
- BROMWICH, T.J.I'A (1908) The Theory of Infinite Series, p. 457.
- JAISWAL, J.P. (1952) «On Meijer Transform - I» *Maths. Zeitschrift*, **55**, p. 387.
- MEIJER, C.S. (1941) *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* **44**, p. 727-737.

Department of Mathematics and Statistics.
Lucknow University,
Lucknow (India).

Sur une propriété de similitude des configurations moyennes de mobiles indéformables

PAR

F. BUCKENS

Proposons-nous de démontrer une extension élémentaire de la propriété de similitude des diagrammes cinèmes aux configurations obtenues par des opérations de moyenne dans le temps sur les positions successives d'une figure plane se mouvant dans son plan.

Soit un système d'axes fixes (Ox , Oy); le mouvement de chaque point peut être défini par la variation de son affixe $z = x + jy$, ($j = \sqrt{-1}$). En particulier nous pouvons définir le mouvement du plan mobile par celui d'un de ses points, z_o , si l'on y joint à chaque instant l'inclinaison θ , par rapport à Ox , d'un vecteur unitaire u entraîné par le plan mobile; soit $u = e^{j\theta}$ (fig. 1).

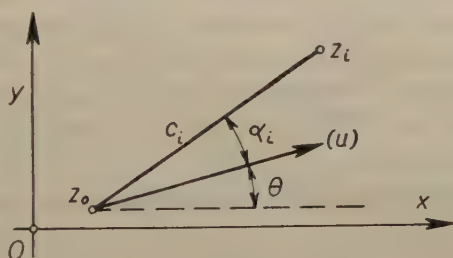


FIG. 1

Définissons sur l'intervalle de temps T la position moyenne (pondérée) du point z par :

$$z_m = \int_0^T z \cdot p(t) dt \quad (1)$$

$p(t)$ étant une fonction donnée (complexe ou non) du temps t .

Un point quelconque z_i du plan mobile a pour affixe :

$$z_i = z_o + k_i u \quad (2)$$

k_i étant une constante :

$$k_i = c_i e^{j\alpha_i} \quad (3)$$

où c_i est la longueur invariable du côté $|z_i - z_o|$ et α_i l'angle constant que fait ce côté avec u .

Or on a :

$$z_{im} = \int_0^T (z_o + k_i u) p(t) dt = z_{om} + k_i u_m \quad (4)$$

en posant

$$u_m = \int_0^T u(t) p(t) dt = \int_0^T e^{i\theta} p(t) dt \quad (5)$$

quantité indépendante du point choisi z_i .

L'expression (4), jointe à (3), montre que les points (z_{1m}, z_{2m}, \dots) forment une configuration polygonale semblable à la figure mobile indéformable (z_1, z_2, \dots) . En effet, les diagonales correspondantes sont proportionnelles et forment des angles égaux, puisque :

$$\frac{|z_{im} - z_{om}|}{|z_i - z_o|} = \frac{|u_m|}{|u|} = |u_m| \quad (6)$$

$$\text{et : } \arg(z_{im} - z_{om}) - \arg(z_i - z_o) = \arg(u_m) - \arg(u) \quad (7)$$

et les expressions aux seconds membres, indépendantes de i , donnent respectivement le rapport de similitude et l'angle de rotation relative.

Nous conviendrons d'appeler la figure (z_{1m}, z_{2m}, \dots) la configuration moyenne (pondérée « p »), dans l'intervalle de temps T de la figure indéformable (z_1, z_2, \dots) .

Si l'on adopte une moyenne de poids uniforme ($p = 1/T$), on a simplement :

$$u_m = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\theta} dt \quad (8)$$

ce qui montre que le rapport de similitude est alors au plus égal à un :

$$|u_m| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |e^{i\theta}| dt = 1 \quad (9)$$

la borne supérieure n'étant atteinte que si le mouvement du plan mobile se réduit à des translations, l'angle θ demeurant constant.

Ces considérations peuvent se généraliser dans les différents termes d'une série de Fourier, qui, par superposition, permet de reconstituer le mouvement dans l'intervalle T . Ce mouvement sera ainsi entièrement défini s'il est périodique de période T .

Exprimons en effet les variations des projections de z_i par des séries de Fourier trigonométriques :

$$x_i = \sum_{n=0}^{\infty} [X'_{in} \cos(2\pi nt/T) + X''_{in} \sin(2\pi nt/T)]$$

$$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} [Y'_{in} \cos(2\pi nt/T) + Y''_{in} \sin(2\pi nt/T)]$$

et remarquons que l'on peut mettre $z_i = x_i + jy_i$ sous la forme :

$$z_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{in} e^{j2\pi nt/T} \quad (10)$$

série de Fourier dont les coefficients complexes :

$$a_{in} = \frac{1}{T} \int_0^T z_i e^{-j2\pi nt/T} dt \quad (11)$$

s'expriment facilement en fonction des X_{in} et Y_{in} ; on a en effet :

$$a_{i,n} + a_{i,-n} = X'_{in} + jY'_{in} \quad a_{i,n} - a_{i,-n} = X''_{in} + jY''_{in}$$

On peut considérer, à chaque étage (n) de la série de Fourier, les a_{in} comme exprimant les positions moyennes des points z_i , donnés par (2), la fonction $p(t)$ de (4) étant ici :

$$p_n(t) = \frac{1}{T} e^{-j2\pi nt/T} \quad (12)$$

On obtient alors :

$$a_{in} = a_{on} + k_i u_{mn} \quad (13)$$

avec, selon (5) :

$$u_{mn} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(\theta - 2\pi nt/T)} dt \quad (14)$$

On forme de cette manière, pour chacune des valeurs de n , des configurations partielles (a_{1n} , a_{2n} , ...) semblables à la figure indéformable mobile (z_1 , z_2 , ...), chacune de ces configurations tournant, d'après (10), à la fréquence indiquée par n , « nombre de tours » dans l'intervalle T , dans le sens positif ou négatif suivant le signe de n , autour de l'origine des axes. Comme l'indique (10), la superposition des vecteurs correspondants dans ces figures partielles permet de reconstituer à chaque instant la position de la figure indéformable. Le rapport de similitude, donné par la valeur absolue de u_{mn} , pour la configuration partielle d'ordre n , est encore une fois au plus égal

à un, et cette borne supérieure n'est atteinte que si le mouvement se réduit à une rotation à vitesse uniforme dans la fréquence considérée (n/T), en d'autres termes si : $\theta = 2\pi nt/T + \text{const.}$

On note que dans ce cas le rapport de similitude (14) se réduit à zéro pour toutes les autres harmoniques, ainsi que pour la moyenne uniforme (8).

Applications

1) Soit à trouver les figures partielles que l'on peut associer au mouvement périodique d'une bielle AB, (fig. 2), à laquelle un point C se trouve rigidement relié; nous considérons un système bielle-

manivelle d'« obliquité » $\lambda = \frac{R}{L}$. Soit OB l'axe réel, que nous prenons pour repère de l'angle ψ de la manivelle, et attachons le vecteur unitaire u à la bielle AB; on a :

$$u = e^{j\theta}, \quad z_A = R \cdot e^{j\psi}, \quad z_B = z_A + L \cdot u, \quad z_C = z_A + c \cdot e^{j\alpha} \cdot u$$

Les constantes c et α sont respectivement égales à la longueur AC et à l'angle BAC, tandis que l'angle variable θ peut se mettre sous la forme :

$$\theta = - \arcsin (\lambda \sin \psi)$$

La décomposition du mouvement par une série de Fourier donne une séquence de figures, A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} , semblables au triangle ABC. Les affixes des sommets de ces triangles sont donnés par (11). Si l'on suppose la vitesse angulaire de la manivelle constante ($\dot{\psi} = 2\pi t/T$), on trouve, en tenant compte de la formule :

$$\cos \theta = (1 - \lambda^2 \sin^2 \psi)^{1/2} = b_0 + b_2 \cos 2\psi + b_4 \cos 4\psi + \dots$$

avec (*) :

$$b_0 = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 \left(1 + \frac{3}{16} \lambda^2 + \frac{5}{64} \lambda^4 + \dots \right)$$

$$b_2 = \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{15}{128} \lambda^4 + \dots \right)$$

$$b_4 = -\frac{1}{4} \lambda^4 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda^2 + \dots \right) \text{ etc.}$$

(*) V. p. ex. : BIEZENO et GRAMMEL, « Technische Dynamik », Springer 1939, p. 847.

Si l'on remarque que dans le plan complexe Oxy on peut déterminer sur la droite $a_{A1} a_{C1}$ un point a_1 dont l'affixe vérifie les égalités :

$$a_{A1} = a_{A'} + a_1, \quad a_{C1} = a_{C,-1} + a_1$$

la similitude de la répartition des points a_{Cn} sur la droite OC' par rapport à celle des points a_{Bn} sur OB' montre incidemment que le mouvement du point C peut être reconstitué à partir d'un système

bielle-manivelle fictif, d'axe OC', de rayon $|a_A| = \frac{c}{L_r} \cdot R = c \cdot \lambda$ et de même obliquité, la longueur de la bielle étant c , à condition de superposer le mouvement d'une manivelle a_l autour du pied de cette bielle. On note que cette manivelle auxiliaire, dont l'extrémité donne la trajectoire du point C, tourne à la vitesse indiquée par $n = 1$ tour dans la période T, dans le même sens que la manivelle fictive principale, mais avec un retard d'angle γ .

On retrouve ainsi le théorème, dit « de Crocco », relatif aux systèmes à manivelle et bielles multiples.

2) Un cas pratiquement intéressant est celui où l'oscillation angulaire $\theta(t)$ est périodique et s'exprime à l'aide d'une fonction sinus-oidale, à la fréquence fondamentale, par exemple :

$$\theta = \theta_0 - \theta_1 \sin(2\pi t/T)$$

θ_0 et θ_1 désignant des constantes.

On obtient alors au niveau (n) de la série de Fourier :

$$u_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\theta_0 + \theta_1 \sin \varphi - n\varphi - m\pi)} d\varphi$$

en posant $\varphi = 2\pi t/T - \pi$ dans l'expression (13).

On a donc :

$$u_{nm} = \frac{(-1)^n}{2\pi} \cdot e^{j\theta_0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\theta_1 \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi$$

et comme cette intégrale représente une expression bien connue (*) de la fonction de Bessel J_n , on peut écrire :

$$u_{nm} = (-1)^n \cdot e^{j\theta_0} \cdot J_n(\theta_1)$$

expression qu'il suffira de porter dans (13) pour obtenir les différents

(*) V. par ex. : WHITTAKER et WATSON « A Course of modern Analysis », Cambr., 1946, p. 362.

coefficients de la série de Fourier (10), en notant que les termes a_{on} y caractérisent le mouvement de translation de z_o , sur lequel se greffe l'oscillation angulaire θ .

Remarquons encore, pour généraliser, que si l'on a :

$$\theta = \theta_o - \theta_1 \sin(2\pi t/T) + 2\pi q t/T$$

le coefficient q étant entier, positif ou négatif, on trouve :

$$u_{nm} = (-1)^n e^{j\theta_o} \cdot J_{n-q}(\theta_1).$$

Remarques

1) On peut être amené à comparer des intervalles de temps T différents; on pourrait, en s'inspirant de ce qui précède, remplacer la définition (1) de la moyenne par :

$$z_m = \frac{1}{T} \int_0^T z \cdot p\left(\frac{t}{T}\right) \cdot dt \quad (15)$$

On pourrait ensuite généraliser en considérant, au lieu de z , une fonction attachée à la position z . On aurait alors pour une trajectoire donnée :

$$F_m(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots) = \frac{1}{T} \int_0^T F(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots) \cdot p\left(\frac{t}{T}\right) \cdot dt \quad (16)$$

la fonction F pouvant dépendre non seulement de z , mais de la vitesse

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

de l'accélération, etc.

2) Si l'on considère plus spécialement la vitesse moyenne :

$$\dot{z}_m = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{z} \cdot p_1\left(\frac{t}{T}\right) \cdot dt \quad (17)$$

à fonction de poids p_1 donnée dans l'intervalle de temps T , on pourra représenter dans le plan (complexe) de l'hodographe (\dot{z}) les vitesses des sommets z_i d'un polygone mobile indéformable, par des points \dot{z}_i ; ces derniers forment le cinème des vitesses, figure *déformable*, mais constamment semblable au polygone mobile. Il suffit de dériver (2) par rapport à t , et de remplacer u par \dot{u} et p par p_1 dans (5) pour retrouver des relations analogues à (6) et (7) dans le plan de l'hodo-

graphe; en d'autres mots, les vitesses moyennes \dot{z}_{im} forment une figure qui reste semblable au polygone indéformable, et pour une même échelle des longueurs, le rapport de similitude vaut :

$$|\dot{z}_m| = \left| \frac{\dot{z}}{T} \int_0^T \dot{\theta} \cdot e^{i\theta} p_1 \left(\frac{t}{T} \right) dt \right|$$

Si la fonction de poids est réelle et positive, $p_1 \geq 0$, une borne supérieure de ce rapport est donné par la moyenne de la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ dans l'intervalle de temps T :

$$|\dot{z}_m| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |\dot{\theta}| p_1 \left(\frac{t}{T} \right) dt.$$

D'autre part la dérivation des séries de Fourier (10) :

$$\dot{z}_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{in} \frac{2\pi j n}{T} e^{j2\pi n t / T}$$

montre que l'on peut reconstituer à chaque instant le cinème des vitesses par la composition de cinèmes partiels, dont les sommets à l'instant $t = 0$ sont donnés par les points $a_{in} \frac{2\pi j n}{T}$ dans le plan de l'hodographe, pour chaque valeur de n , qui représente le nombre de tours exécutés par ces cinèmes tournants dans l'intervalle T . On note que ces cinèmes partiels sont non seulement semblables au polygone mobile, mais encore de grandeurs constantes, alors que le cinème résultant des vitesses peut en général changer de grandeur.

Ces considérations se généralisent sans peine pour les cinèmes d'accélération.

3) Considérons la variation de la position moyenne z_m avec l'intervalle T , dont nous prendrons l'origine fixe. Dérivons (15) par rapport à T , nous trouvons :

$$\frac{dz_m}{dT} = -\frac{1}{T^2} \int_0^T z p \cdot dt + \frac{z(T) p(1)}{T} - \frac{1}{T^3} \int_0^T z t p' dt$$

en indiquant par p' la dérivée de la fonction p par rapport à son argument.

Par intégration partielle de la dernière intégrale, on obtient :

$$\frac{dz_m}{dT} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{z} \cdot \frac{t}{T} \cdot p \left(\frac{t}{T} \right) dt$$

expression qui ne se confond avec celle (17) de la vitesse moyenne, que si l'on choisit une fonction de poids des vitesses égale à :

$$\phi_1\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{t}{T} \cdot \phi\left(\frac{t}{T}\right)$$

De même, on n'aura pour l'accélération moyenne :

$$\ddot{z}_m = \frac{d\dot{z}_m}{dT} = \frac{d^2z_m}{dT^2}$$

que si la fonction de poids des accélérations est donnée par :

$$\phi_2\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{t}{T} \cdot \phi_1\left(\frac{t}{T}\right) = \left(\frac{t}{T}\right)^2 \phi\left(\frac{t}{T}\right)$$

4) Si le mouvement de la figure indéformable n'est pas périodique, l'accroissement indéfini de l'intervalle T transforme la série (10) en une intégrale de Fourier; le spectre continu de configurations semblables qui lui est associé peut présenter une signification pratiquement intéressante, par exemple lorsque le coefficient de proportionnalité ne diffère sensiblement de zéro qu'au voisinage de certaines fréquences.

Au sujet du coefficient de glissement introduit dans l'étude de l'usure des profils actifs des dents des engrenages cylindriques à dents droites

par

Cyp. DEMARS
Ingénieur civil
(Université de Liège)

En 1932, dans son ouvrage « Théorie et technologie des engrenages » ⁽¹⁾, J. Pérignon, Ingénieur des Arts et Manufactures, écrivait (pages 109 et 110, tome I) :

« De prime abord, l'idée d'usure appelle celle de glissement et c'est »
« de ce côté, surtout, que s'est porté l'effort des chercheurs. Efforts diver- »
« gents d'ailleurs et presque toujours entachés d'erreurs dès le principe : »
« on trouve, en effet, à la base de ces études, la notion de « glissement »
« spécifique » ⁽²⁾, qui du point de vue homogénéité, est sans dimension, »
« alors que le glissement réel a la dimension d'une vitesse. Aussi n'est-il »
« pas étonnant que les résultats obtenus diffèrent du tout au tout avec »
« les résultats expérimentaux. »

En 1942, le « glissement spécifique » était encore, cependant, pris en considération, notamment, dans un mémoire dû à feu R. Isaye, Ingénieur à la Société J. Cockerill, publié par la revue belge « *Standards* » et, plus récemment encore, dans « *Maschinen Elemente* » de W. Tochtermann (Springer-Verlag-1951).

* * *

Nous voudrions, ci-après, montrer que Pérignon avait parfaitement raison quand il rejetait la prise en considération du (des) « glissement(s) proportionnel(s) » pour le problème en étude.

(1) Editeur : DUNOD, Paris.

(2) Autre nom du « coefficient de glissement » appelé, aussi : « glissement proportionnel » ou « glissement unitaire ».

Pour ce faire, il convient d'abord :

1^o) de préciser comment deux éléments odontoïdaux ⁽¹⁾ conjugués, qui seront en prise, s'abordent et se quittent.

2^o) de préciser la variable dont nous nous servirons pour établir nos équations et tracer nos diagrammes.

3^o) d'expliciter, en fonction de cette variable, la longueur de chacun des deux éléments précités.

* * *

1^o) CONSIDÉRONS LES FIGURES 1 ET 2

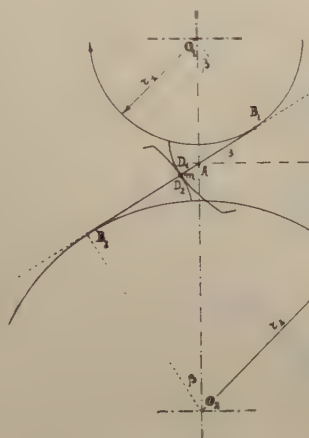


FIG. 1

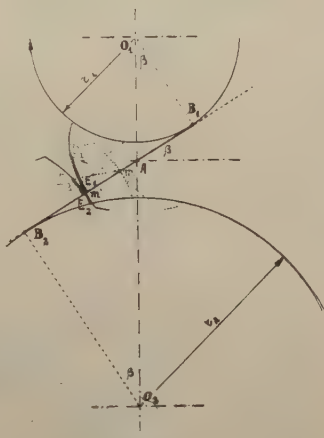


FIG. 2

Deux odontoïdes sont en prise en m (fig. 1).

Au bout d'un certain temps [le pignon (que nous supposons : moteur) tournant dans le sens indiqué par la flèche], les deux odontoïdes, dont le point de contact s'est déplacé de B_1 vers B_2 , se touchent en m' (fig. 2).

Il se déduit de l'examen des figures que les longueurs des arcs odontoïdaux venus au contact sont de longueurs différentes et que par conséquent, le déplacement de l'un sur l'autre se fait en glissement (accompagné de roulement).

De plus, *remarque importante*, la plus petite des deux longueurs est

(¹) *odontoïde* : profil actif d'une dent.

constamment couverte par la plus grande, autrement dit : ne dépasse jamais, d'un côté ou de l'autre, le bord correspondant de la grande.

La position du point de contact odontoïdal m ⁽¹⁾, sur B_1B_2 (*segment des contacts corrects possibles*) est fixée par la valeur de

$$x = \frac{B_1 m}{B_1 B_2}$$

que nous choisissons comme variable [x ne peut être compris qu'entre 0 (quand m est en B_1) et 1 (quand m est en B_2) dans le cas des *engrenages extérieurs*].

2° CONSIDÉRONS LA FIGURE 3.

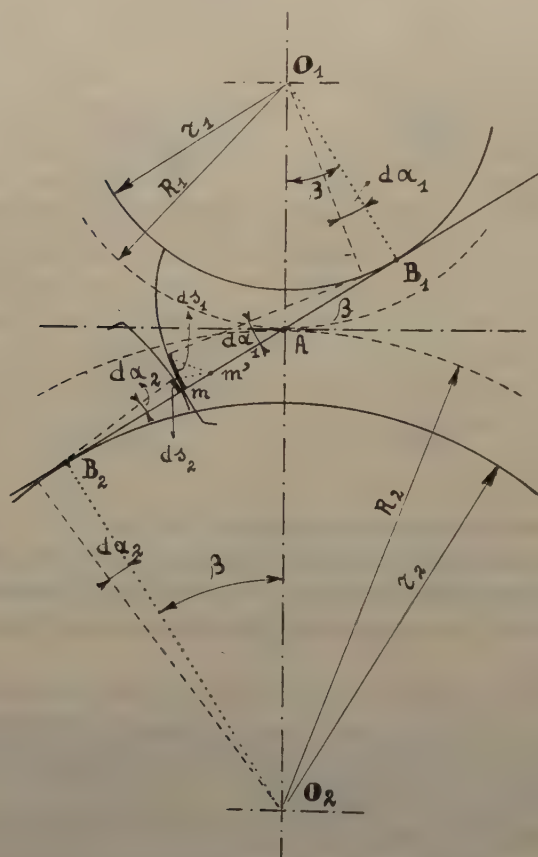


FIG. 3

⁽¹⁾ Aucun point de contact correct ne peut se trouver en dehors du segment $B_1 B_2$.

Nous en déduisons pour deux éléments odontoïdaux qui viennent en prise :

1) (élément odontoïdal du pignon) $ds_1 = B_1 m . d\alpha_1$

soit $ds_1 = x . B_1 B_2 . d\alpha_1$

2) (élément odontoïdal de la roue) $ds_2 = (1 - x) . B_1 B_2 . d\alpha_2$

Or $d\alpha_1 = \rho . d\alpha_2$ ⁽¹⁾ et $B_1 B_2 = R_1 . (1 + \rho) . \sin \beta$

partant : $ds_1 = a . \frac{x}{x_A}$ et $ds_2 = a . \frac{1-x}{\rho . x_A}$

en ayant posé :

$$a = R_1 . \sin \beta . d\alpha_1 \quad \text{et} \quad x_A = \frac{1}{1 + \rho} \quad (2)$$

Les diagrammes de ds_1 et de ds_2 (en fonction de x) pour les deux cas où $\rho = 1$ et $\rho = 2$ sont dessinés aux figures 4 et 5.

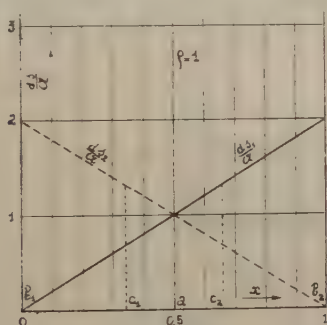


FIG. 4

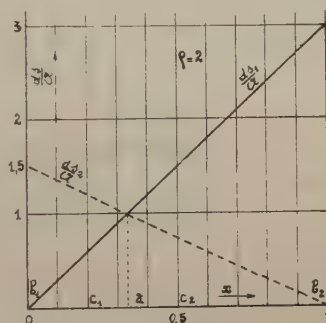


FIG. 5

Nous y constatons que quand le contact interodontoïdal se fait :

a) entre flanc des dents du pignon et face des dents de la roue

on a : $ds_2 > ds_1$

(1) $\rho = \frac{R_2}{R_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{n_2}{n_1}$ (rapport de transmission).

où : R_1 et R_2 sont les rayons des « circonférences de roulement » ;

N_1 et N_2 les nombres de t/min ,

n_1 et n_2 les nombres de dents, respectivement, du pignon et de la roue.

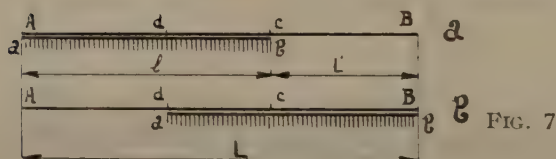
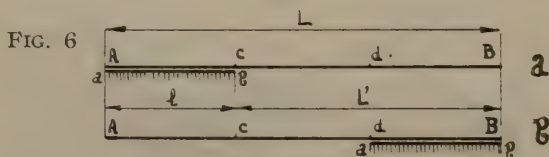
(2) x_A est l'expression de la variable x quand m est en A (fig. 3).

- b) entre flanc des dents de la roue et face des dents du pignon
on a : $ds_1 > ds_2$
- c) en A, on a : $ds_1 = ds_2$
(il n'y a, en ce point, que du roulement)
- d) en B_1 et B_2 on a, respectivement : $ds_1 = 0$, $ds_2 = 0$
(quand m tend vers B_1 ou B_2 , il tend à n'y avoir, entre éléments en prise, que du glissement).

* * *

N'envisageant, ici, que le phénomène de glissement, nous pourrions considérer le déplacement relatif de deux éléments odontoïdaux comme étant celui de deux éléments plans (compte tenu de la remarque faite en fin du 1^o) — voir ci-avant).

Ces deux surfaces planes, de longueurs respectivement égales à L , et l , sont donc, initialement et finalement, dans les positions fixées aux figures 6a et 6b ou 7a et 7b, qui diffèrent par le fait que d'une



part, $L - l$ est supérieur à l et que, d'autre part, $L - l$ est inférieur à l .

* * *

Une théorie édifiée en vue de pouvoir tenir compte de l'usure (U_1 pour le pignon, U_2 pour la roue) des odontoïdes, dans la détermination des dimensions optima des dents d'un engrenage cylindrique

à dents droites met en œuvre des facteurs numériques appelés « coefficients de glissement » ⁽¹⁾ y admet :

1) que l'usure de l est, entr'autres facteurs, proportionnelle au « coefficient de glissement » : $N_g = \frac{L - l}{l}$ (1)

2) que l'usure de L est, entr'autres facteurs, proportionnelle au « coefficient de glissement » : $v_g = \frac{L - l}{L}$ (2)

* * *

Pour pouvoir expliciter la ou les lois régissant un phénomène, il est nécessaire et admis de faire des hypothèses, sous condition qu'elles puissent se défendre, soient logiques et conduisent, finalement à ce que montrent les faits.

Et nous nous posons, tout d'abord, la question : *l'hypothèse de la proportionnalité de l'usure au « glissement proportionnel » peut-elle être défendue, est-elle logique ?*

A notre avis : non, et nous pensons pouvoir le montrer de deux manières :

I) PAR LE MOYEN DE L'EXPÉRIENCE COURANTE

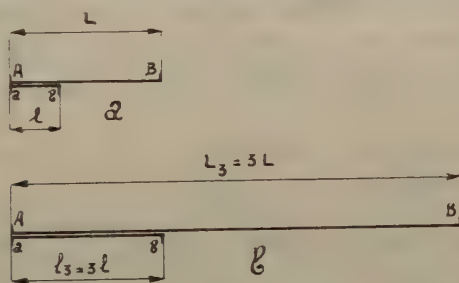


FIG. 8

Considérons, d'une part, l'ensemble L, l (fig. 8a)

et d'autre part, l'ensemble L_n, l_n (fig. 8b).

géométriquement semblable au premier et pour lequel le facteur de similitude $\frac{L_n}{L} = \frac{l_n}{l}$ est, par exemple, égal à 3.

(1) R. ISAYE n'envisageait que N_g .

Il est certain que l'usure d'un *élément* de l'une ou l'autre pièce dans le cas 8b sera 3 fois plus grande que celle de son homologue dans le cas 8a, la longueur de la surface qui le lèche étant trois fois plus grande dans le premier cas (8b) que dans le second (8a).

L'hypothèse des « *coefficients de glissement* » conduirait (tous autres facteurs inchangés) à des usures égales pour les pièces courtes, d'une part, et les pièces longues, d'autre part, puisque :

$$\text{pièces courtes} \quad \frac{I_n - l_n}{l_n} = \frac{I_r - l}{l}$$

$$\text{pièces longues} \quad \frac{I_n - l_n}{I_n} = \frac{I_r - l}{I_r}$$

quel que soit n .

II) PAR VOIE ANALYTIQUE

Considérons le schéma a de la fig. 9 et envisageons :

1^o) le déplacement, en bloc, de l sur I_r ,

puis 2^o) le déplacement de l sur I_r par portions successives (par moitié, par exemple), cf. schéma b de la fig. 9.

Les états initial et final du cas b sont les états initial et final du cas a et, en somme, les deux cas sont identiques.

Quelle que soit donc la manière envisagée pour faire passer l de sa position initiale Ac à sa position finale dB , l'usure de cd (partie la plus usée de I_r) et celle de l doivent être identiques.

Calculons les usures dans le cas du schéma a , puis dans le cas du schéma b en tenant compte de \mathcal{N}_g et de v_g , comme il convient, dans chaque cas.

Cas du schéma a (fig. 9)

$$\text{L'usure de } l \text{ est proportionnelle à } \mathcal{N}_g = \frac{I_r - l}{l} \quad (3) \text{ (cf. 1)}$$

L'usure de I_r (de cd en particulier) est proportionnelle à

$$v_g = \frac{I_r - l}{I_r} \quad (4) \text{ (cf. 2)}$$

Cas du schéma b (fig. 9)

1^o) déplacement, de $c'c$ en $d'B$, de la moitié I de l :

l'usure de I est proportionnelle à

$$\frac{I' - 0,5 l}{0,5 l} = \frac{I_r - l}{0,5 l} = 2\mathcal{N}_g \quad (5) \text{ (cf. 3)}$$

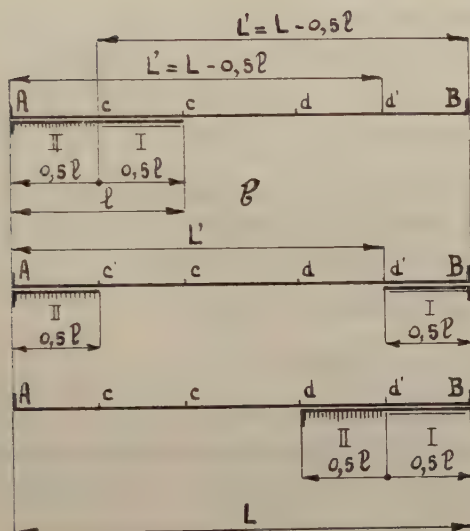
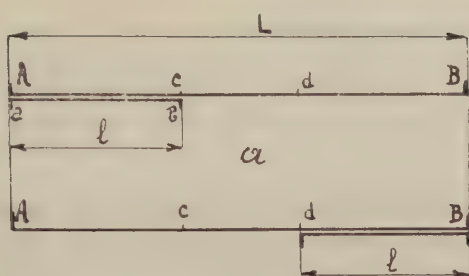


FIG. 9

et l'usure de Bc' (de cd , en particulier) est proportionnelle à

$$\frac{L' - 0,5l}{L'} = \frac{L - l}{L - 0,5l} > v_g \quad (6) \text{ (cf. 4)}$$

2°) déplacement, de $A c'$ en $d d'$, de la moitié II de l :

l'usure de II est proportionnelle à

$$\frac{L' - 0,5l}{0,5l} = \frac{L - l}{0,5l} = 2\mathcal{N}_g \quad (7) \text{ (cf. 3)}$$

et l'usure de Ad' (de cd en particulier) est proportionnelle à

$$\frac{L' - 0,5l}{L'} = \frac{L - l}{L - 0,5l} > v_g \quad (8) \text{ (cf. 4)}$$

De ces relations nous déduisons :

a) l'usure de l'ensemble I II (cas *b*) qui devrait être trouvée égale à l'usure de *l* (cas *a*) est doublée (triplée si on avait coupé *l* en 3 morceaux, etc.);

b) l'usure de *cd* est, elle, trouvée plus grande (plus que doublée) dans le cas *b* que dans le cas *a* (pour la division admise, elle est en effet proportionnelle : à $2 \frac{L-l}{L-0,5l} > 2v_g$).

Ce raisonnement montre, lui aussi, clairement, que la considération des « coefficients de glissement » n'est pas indiquée.

* * *

Si avoir justifié le rejet de la considération des coefficients de glissement, comme l'indiquait J. Pérignon est utile, il convient, de proposer autre chose, il convient de rebâtir.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

1^o) Cas où $L-l$ est supérieur à *l*

a) l'usure de *l* est proportionnelle à $L-l$
 b) l'usure de L est proportionnelle à celle de sa partie *cd* (la plus usée), c'est-à-dire à *l* ⁽¹⁾. (9)

2^o) Cas où $L-l$ est inférieur à *l*

a') l'usure de *l* est proportionnelle à $L-l$
 b') l'usure de L est proportionnelle à celle de sa partie *cd* (la plus usée), c'est-à-dire à $L-l$ ⁽²⁾. (10)

Comme, d'autre part, on ne pourrait affirmer a priori que les usures d'un ensemble L , *l* en mouvement relatif demeurent inchangées quand leur vitesse relative de déplacement change, nous prévoyons, dans l'expression finale de l'usure de l'une ou l'autre pièce de l'en-

(1) Un élément de *l* est liché par une surface ayant comme longueur $L-l$, un élément de la portion *cd* de L est liché par une surface ayant comme longueur *l*.

(2) Un élément de *l* est liché par une surface ayant comme longueur $L-l$, un élément de la portion *cd* de L est liché par une surface ayant comme longueur $L-l$.

semble, un facteur k_v fonction de cette vitesse (provisoirement, nous posons $k_v = 1$, jusqu'à plus ample informé).

* * *

Les hypothèses que nous avons faites résistent aux raisonnements critiques I et II qui nous ont amené à suivre L. Pérignon qui affirmait la convenance du rejet des coefficients de glissement.

* * *

Il reste, maintenant, à savoir si les courbes d'usure déduites de nos hypothèses rendraient compte de l'un ou l'autre phénomène qui se constate dans l'exploitation des engrenages cylindriques à

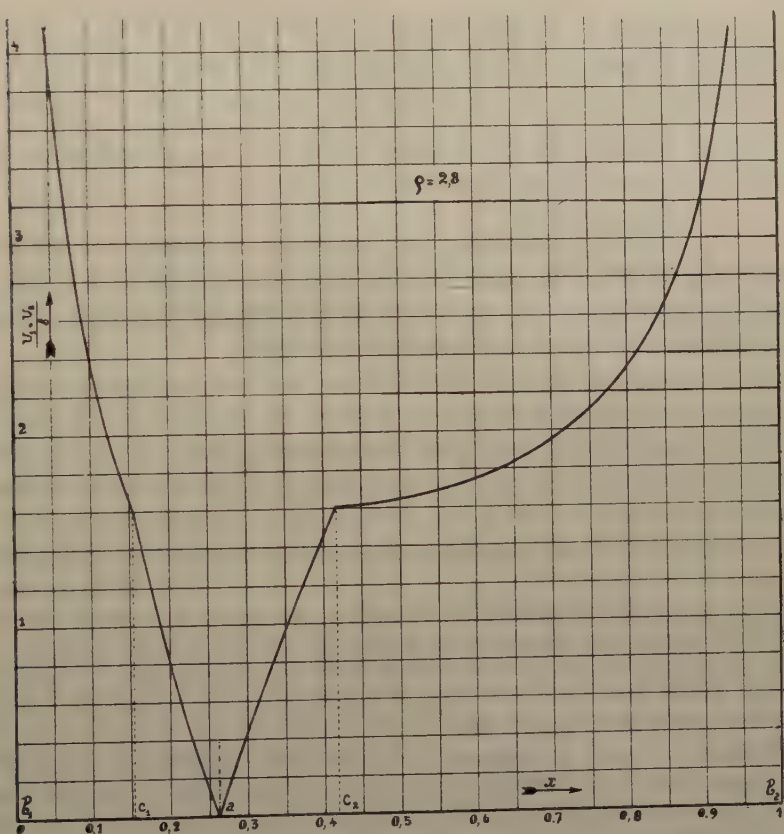


FIG. 10

dents droites et à comparer avec ce qui peut être déduit des courbes déduites de la considération des coefficients de glissement, pour le même objet.

Envisageons les diagrammes des usures totales $U_1 + U_2$ ⁽¹⁾ en fonction de notre variable x , pour l'un et l'autre cas.

A) Nos hypothèses nous conduisent (pour le cas où $\rho = 2,8$ par exemple) au diagramme dessiné à la figure 10.

Les deux branches de ce diagramme présentent, chacune, une discontinuité.

Ces discontinuités se situent en des points de B_1B_2 que nous appelons C_1 et C_2 tels que :

en C_1 (situé entre B_1 et A) on a : $ds_2 - ds_1 = ds_1$

et en C_2 (situé entre A et B_2) on a : $ds_1 - ds_2 = ds_2$.

Ces points C_1 et C_2 délimitent la zone de contact $C_1A C_2$ où le roulement l'emporte sur le glissement, les zones extérieures B_1C_1 et C_2B_2 étant celles où le glissement l'emporte sur le roulement.

B) Tenir compte de \mathcal{N}_g et de v_g conduit à des diagrammes dont les deux branches sont continues (fig. 11).

On a souvent fait remarquer que des odontoïdes usées présentaient, dans certains cas, une zone d'usure (répartie de part et d'autre des points odontoïdaux qui viennent se toucher en A) dont l'aspect est différent de celui des 2 zones extérieures.

Nos diagrammes (cf. fig. 10) montrent une discontinuité, conforme à l'observation, dans la valeur de l'usure, les autres non (cf. fig. 11).

Cette discontinuité est très vraisemblablement, aussi, sous la dépendance de phénomènes dus au roulement que nous n'envisageons pas ici.

Il nous paraît avoir montré la correction de l'opinion de J. Péri-

(1) U_1 (usure d'une odontoïde du pignon au point de contact m) + U_2 (usure de l'odontoïde conjuguée de la roue au même point de contact).

Cf. *Engrenages cylindriques à dentures droites* (2 volumes) par Cyp. DEMARS, ouvrage publié grâce au concours de la Fondation Universitaire de Belgique, Editeur : Desoer à Liège (1949).

Au sujet du calcul des dentures d'un engrenage cylindrique à dents droites (2 volumes) par Cyp. DEMARS, « ouvrage primé au Concours 1947-1948 de la Société Royale Belge des Ingénieurs et des Industriels », Editeur : Desoer, à Liège (1950).

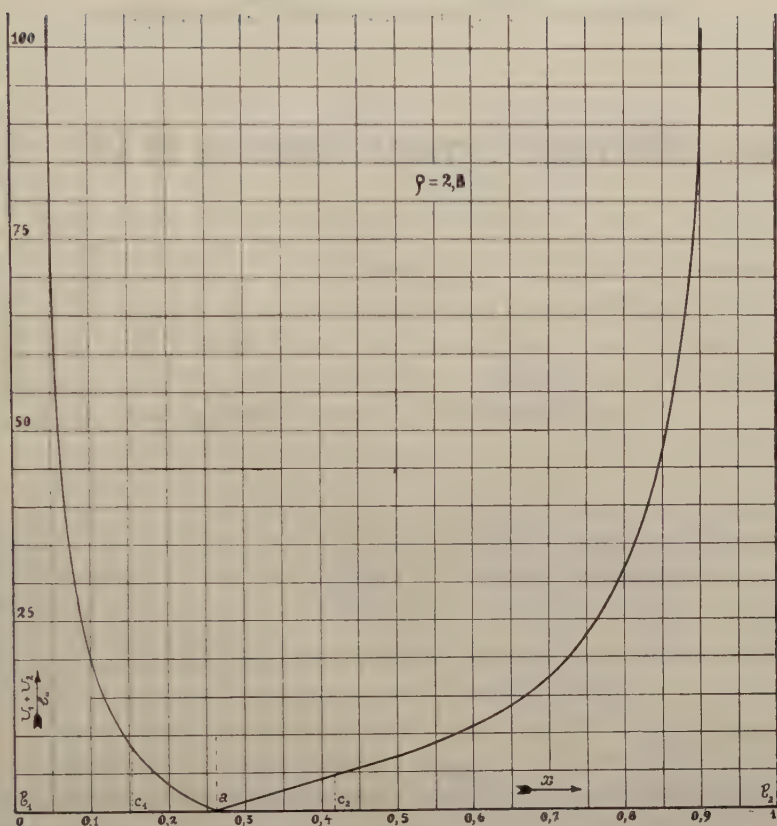


FIG. 11

gnon qui rejetait la prise en considération des \mathcal{N}_g et v_g dans l'étude de l'usure odontoïdale.

Nous espérons que les hypothèses que nous avons faites s'avéreront utiles dans l'étude de cette machine simple bimillénaire qu'est l'engrenage droit ⁽¹⁾.

(1) Héron d'Alexandrie en décrivait vers 150-200 av. J.-C.

Au Concours Universitaire 1941-1948 était proposée la question suivante : « Donnez une solution satisfaisante au problème de la détermination des dentures droites des engrenages cylindriques. »

Sciences Physiques et Chimiques

Spectre infra-rouge à grande dispersion de $\text{CH}_2 = \text{CHD}$

(PREMIÈRE PARTIE)

PAR

C. COURTOY, (Faculté des Sciences de Namur)

ET

M. de HEMPTINNE, (Université de Louvain).

RÉSUMÉ : Le spectre d'absorption IR, à grande dispersion, de la molécule $\text{CH}_2 = \text{CHD}$ est analysé ici entre 750 cm^{-1} et 3207 cm^{-1} . Une grande partie du spectre est présentée sous forme de planches; des tableaux donnent la valeur, réduite au vide, des fréquences correspondant au maxima d'absorption. Les interprétations des têtes de bande et de certaines structures fines sont discutées.

INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, l'étude des spectres Raman et infra-rouge des deutéro-substitués de l'éthylène a fait l'objet de nos préoccupations. ⁽¹⁾ à ⁽⁴⁾ A mesure que le travail progressait, il est apparu clairement, qu'il était indispensable de connaître les spectres Raman des molécules à l'état gazeux et de mesurer leurs spectres infra-rouges à grande dispersion.

L'étude des spectres Raman des éthylènes gazeux fera l'objet d'une publication ultérieure, mais cependant nous ferons déjà usage de certains résultats obtenus.

Nous avons enregistré et mesuré les spectres d'absorption infra-rouge de la molécule $\text{C}_2\text{H}_3\text{D}$ depuis 700 cm^{-1} jusqu'à 4800 cm^{-1} environ. Quelques régions où l'absorption du CO_2 et de la vapeur d'eau étaient trop intense ont toutefois dû être négligées.

Dans le travail actuel nous présentons et discutons un certain nombre de bandes obtenues. La région spectrale qui s'étend de 4000 cm^{-1} à 5000 cm^{-1} fera l'objet d'un travail qui sera publié prochainement.

TECHNIQUE EXPERIMENTALE :

Les spectres infra-rouges à grande dispersion ont été obtenus au moyen du spectrographe à prisme et réseau monté par le professeur Migeotte à l'Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège. Cet appareil a été décrit en détail par M. Migeotte (5)

Les résultats fournis par une première série d'enregistrements avaient été indiqués dans une note préliminaire (3). Depuis lors le spectrographe avait été amélioré grâce à une pile thermoélectrique plus sensible (de la firme Perkin-Elmer) et à un meilleur amplificateur (nouveau modèle de la même firme avec 13 interruptions par seconde). De plus, une came avait été installée entretemps réglant le mouvement de rotation du prisme en fonction de celui du réseau.

Les nouveaux enregistrements ont été effectués en été 1951. A cette époque les installations avaient été transportées à la station météorologique du Sphinx dépendant de la station scientifique du Jungfraujoch en Suisse. Grâce à la sécheresse de l'atmosphère à cette altitude (3540 m) les raies de vapeur d'eau venant perturber les spectres étaient amoindries.

Au moment de ces recherches le spectrographe était équipé au moyen de réseaux originaux gravés sur une surface de 17 sur 22 cm. Un réseau de 2400 traits par pouce a été utilisé dans la région de 700 à 1250 cm^{-1} , un autre ayant 3600 traits par pouce a été utilisé de 1250 à 1850 cm^{-1} ; un troisième de 7500 traits par pouce a pu servir de 1850 à 3200 cm^{-1} . Le prisme du monochromateur était en NaCl. Le courant était envoyé de l'amplificateur vers un enregistreur à plume, type G, de Leeds et Northrup.

Tous les enregistrements ont été pris deux fois et la correspondance était toujours excellente.

La constante de l'appareil a été recalculée pour chaque série d'enregistrements. Pour obtenir cette constante nous avons adopté diverses raies de référence suivant les régions spectrales. De 1850 à 1935, de 2085 à 2218 et de 2800 à 3200 cm^{-1} nous avons utilisé certaines raies d'émission du mercure en employant les valeurs fournies par le National Bureau of Standards de Washington. Toutes les autres mesures sont finalement ramenées aux raies de la structure fine de la bande d'absorption du CO à 2150 cm^{-1} . Pour celles-ci, nous avons adopté les valeurs de Rao (6) diminuées de 0.11 cm^{-1} .⁽¹⁾ Nous avons

(1) Cette correction a été suggérée par le Dr E.K. Plyler, du National Bureau of Standards à Washington.

chaque fois fait la moyenne entre les valeurs fournies par plusieurs raies de cette bande, mais en écartant la raie P_3 qui donnait une erreur systématique pour la constante. Ces raies nous ont servi de comparaison soit directement, dans le premier ou le deuxième ordre du réseau, soit indirectement en nous permettant de recalculer certaines raies de H_2O . Pour les plus basses fréquences, nous avons pris comme repère les raies d'absorption de la vapeur d'eau aux environs de 1595 cm^{-1} , prises dans le deuxième ordre du réseau. Nous avons trouvé et adopté les valeurs suivantes 1596,24 et 1594,44. Les valeurs de H.H. Nielsen (7) étaient 1596,7 et 1594,7. Il semble bien que les valeurs de Nielsen n'aient pas été ramenées au vide. Avec cette correction ces valeurs deviendraient 1596,25 et 1594,25; ces nombres sont en meilleur accord avec ceux que nous avons acceptés.

Pour calculer les valeurs proposées dans la note précédente (3) nous avons choisi comme référence des raies de vapeur d'eau, et nous avons adopté les valeurs de Nielsen que nous avons supposées être ramenées au vide. De là vient la diminution pour les valeurs des nombres d'onde proposés actuellement.

Deux cuves d'absorption ont été utilisées; la première avait 15 cm de long et la seconde fournissait un parcours de 1 mètre (Perkin-Elmer). Toutes deux étaient munies de fenêtres en NaCl ou KBr. De toutes deux, on pouvait facilement condenser l'éthylène au moyen d'air liquide et la cuve pouvait être vidée pour mesurer les intensités transmises sans absorption par le gaz.

Le gaz utilisé, préparé à l'Université de Louvain, est celui qui a servi à l'étude du spectre Raman de cette molécule en phase liquide(1). Il contient comme on l'a signalé alors une petite quantité de C_2H_4 .

Les valeurs indiquées pour les nombres d'onde ont toutes été ramenées au vide. L'erreur admise varie suivant les régions du spectre de quelques centièmes de cm^{-1} jusqu'à un peu plus de $0,1\text{ cm}^{-1}$, sans tenir compte toutefois d'une éventuelle correction à apporter à l'ensemble si nos raies de référence s'avéraient incorrectes.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les planches dans lesquelles nous avons porté en ordonnée l'absorption estimée en pour-cent et en abscisse les fréquences en cm^{-1} , réduites au vide, donnent une vision claire de l'ensemble du spectre.

Comme le spectrographe n'était pas dans le vide, la présence de vapeur d'eau et de CO_2 a été gênante pour l'enregistrement de certaines

régions du spectre. Nous avons omis ces régions dans les planches publiées, mais avons cependant reproduit certaines parties particulièrement caractéristiques. Là où la vapeur d'eau nous empêchait d'estimer convenablement le pour-cent d'absorption nous avons tracé la courbe en traits interrompus, ou parfois nous avons simplement inscrit le symbole H_2O . Pour combler les lacunes encore existantes, il faudrait pouvoir disposer d'un spectrographe à réseau monté sous vide. Nous espérons que dans un avenir prochain la possibilité nous en sera donnée.

DISCUSSION DES RÉSULTATS

La molécule $H_2C = CHD$ est de la catégorie dite « toupie asymétrique ». Les bandes seront donc du type A, B ou C, ou un mélange de ces types. Les vibrations gauches sont du type C, la variation du moment électrique se faisant suivant l'axe principal d'inertie perpendiculaire au plan de la molécule, correspondant au plus grand moment d'inertie. Les vibrations planes doivent être du type A ou du type B suivant que la variation du moment électrique est parallèle à l'axe principal correspondant au plus petit moment d'inertie ou à l'axe principal correspondant au moment d'inertie intermédiaire. Souvent les vibrations planes sont telles que la bande correspondante doit apparaître comme un mélange des types A et B.

Les moments d'inertie de la molécule $H_2C = CHD$ calculés (*) en admettant les valeurs suivantes pour les constantes

$$CH = 1,071 \text{ Å} \quad m_H = 1,008132$$

$$CC = 1,353 \text{ Å} \quad m_D = 2,014726$$

$$\widehat{HCH} = 119^\circ 55' \quad m_C = 12,00388$$

sont

$$I_a = 6,999582 \cdot 10^{-40} \text{ gr cm}^2 \quad \text{D'où : } A = \frac{h}{8 \pi^2 c I_a} = 3,99938$$

$$I_b = 30,588923 \cdot 10^{-40} \text{ gr cm}^2; \quad B = \frac{h}{8 \pi^2 c I_b} = 0,915167$$

$$I_c = 37,588505 \cdot 10^{-40} \text{ gr cm}^2; \quad C = \frac{h}{8 \pi^2 c I_c} = 0,744748$$

(*) Ces valeurs ont été calculées et nous ont été communiquées par le Frère CHARETTE

Remarquons que la molécule est plane et qu'un des moments d'inertie I_a est nettement plus petit que les deux autres (I_b et I_c) qui peuvent considérés comme de même ordre de grandeur par rapport à I_a .

On peut dans ce cas, tout en sachant que l'approximation ne pourra être très bonne, assimiler la molécule C_2H_3D à une molécule de type « toupie symétrique ». Les bandes seront alors soit du type parallèle soit du type perpendiculaire. Sous les réserves formulées, nous pourrions appliquer les formules caractéristiques de la toupie symétrique aux bandes observées. Les auteurs américains Gallaway et Barker ont opéré de la sorte dans leur étude des molécules C_2D_4 et C_2H_4 . Nous croyons que cette manière de faire peut présenter quelque utilité et peut servir de première approche à une étude plus rigoureuse du spectre de rotation de la molécule.

Les formules utilisées seront du type

$$R(J) = \nu_0 + 2 \left(\frac{B' + C'}{2} \right) + \left\{ 3 \frac{B' + C'}{2} - \frac{B'' + C''}{2} \right\} J + \left\{ \frac{B' + C'}{2} - \frac{B'' + C''}{2} \right\} J^2$$

$$P(J) = \nu_0 - \left\{ \frac{B' + C'}{2} + \frac{B'' + C''}{2} \right\} J + \left\{ \frac{B' + C'}{2} - \frac{B'' + C''}{2} \right\} J^2$$

ou plus simplement, si $B' + C' = B'' + C''$

$$R(J) = \nu_0 + 2 \left(\frac{B'' + C''}{2} \right) + 2 \left(\frac{B'' + C''}{2} \right) J$$

$$P(J) = \nu_0 - 2 \left(\frac{B'' + C''}{2} \right) J$$

$$\text{et } R_q(K) = \nu_0 + \left(A' - \frac{B' + C'}{2} \right) (2K + 1) - \left\{ \left(A' - \frac{B' + C'}{2} \right) - \left(A'' - \frac{B'' + C''}{2} \right) \right\} K^2$$

$$P_q(K) = \nu_0 - \left(A' - \frac{B' + C'}{2} \right) (2K - 1) - \left\{ \left(A' - \frac{B' + C'}{2} \right) - \left(A'' - \frac{B'' + C''}{2} \right) \right\} K^2$$

RÉGION DE 700 cm^{-1} A 1260 cm^{-1}

1. Dans la région qui s'étend de 700 cm^{-1} à 775 cm^{-1} environ, nous observons une bande qui, du côté des basses fréquences, présente une structure fine remarquablement régulière. La distance entre deux raies consécutives de rotation est remarquablement con-

stante et égale à $1,60 \text{ cm}^{-1}$. La bande devient plus compliquée à partir de 740 cm^{-1} , ce qui est vraisemblablement dû à deux causes : la première est la superposition dans cette région de raies dues au C_2H_4 présent en petite quantité dans le $\text{C}_2\text{H}_3\text{D}$, la deuxième est que la vibration de déformation plane CCD à laquelle nous attribuons la bande en question doit être une superposition des types A et B.

2. Les bandes $807,55 \text{ cm}^{-1}$, $943,64 \text{ cm}^{-1}$ et $1000,15 \text{ cm}^{-1}$ sont sans contestation possible du type C. Elles correspondent aux vibrations gauches de la molécule.

Dans une lettre publiée antérieurement (3) nous avons proposé des formules permettant de retrouver les branches Q des bandes en question. Pour établir les formules nous avons admis que les valeurs des moments d'inertie de l'état fondamental devaient être les mêmes pour les trois bandes. Il nous avait été possible d'établir sur cette base des formules reproduisant, de façon satisfaisante, les valeurs expérimentales mesurées à l'époque. La précision plus grande de nos nouvelles mesures et l'étude des autres bandes du spectre nous obligent à réviser notre manière de voir. Il n'est pas possible d'obtenir des formules convenables dans tous les cas en conservant rigoureusement les même valeurs pour les moments d'inertie de l'état fondamental. Ce fait est dû probablement à l'action des forces de Coriolis sur les vibrations au zéro de la molécule. Nous devons constater en toute objectivité qu'il est possible de trouver plusieurs formules légèrement différentes qui permettent de retrouver assez bien les fréquences expérimentales. Les anciennes formules que nous avons proposées pour les bandes $943,64$ et $1000,15$ sont dans ce cas. Nous préférons cependant les modifier légèrement afin de serrer l'expérience d'encore plus près.

Il ne nous a pas été possible, par contre, de trouver une formule satisfaisante pour la bande $807,59 \text{ cm}^{-1}$. Les mesures nouvelles, qui sont très précises, diffèrent trop des valeurs calculées au moyen de la formule proposée naguère pour que nous puissions la maintenir. Nous n'avons encore rien trouvé qui puisse la remplacer utilement.

Rappelons que, étant donné l'approximation grossière faite en utilisant les formules de la toupie symétrique dans le cas présent, nous ne pouvons nous attendre à des concordances parfaites. Il ne faut donc pas que le lecteur s'abuse en voulant extraire des formules plus qu'elles ne peuvent donner. Les anciennes formules proposées pour les bandes $943,64 \text{ cm}^{-1}$ et $1000,15 \text{ cm}^{-1}$ étaient

$$\nu = 943,68 + 3,12 K'^2 - 3,2 K''^2 - 0,0003 (K'^4 - K''^4)$$

$$\nu = 1000,44 + 3,13 K'^2 - 3,2 K''^2 - 0,0005 K'^4 + 0,0003 K''^4$$

Les nouvelles formules proposées sont

$$R_q(K) = 943,64 + 3,078 (2K'' + 1) - 0,08 K''^2$$

$$P_q(K) = 943,64 - 3,078 (2K'' - 1) - 0,08 K''^2$$

et

$$R_q(K) = 1000,15 + 3,11 (2K'' + 1) - 0,068 K''^2$$

$$P_q(K) = 1000,15 - 3,11 (2K'' - 1) - 0,068 K''^2$$

Les tableaux suivants donnent une idée de la concordance entre les valeurs mesurées et calculées au moyen des nouvelles formules.

Remarquons que les raies centrales des trois bandes sont dédoublées; la chose est particulièrement manifeste pour la bande $807,55 \text{ cm}^{-1}$.

3. La bande située à 1128 cm^{-1} est une superposition des deux types A et B. Elle correspond à la vibration plane de déformation HCC du groupe CH_2 par rapport à $\text{C}=\text{C}$. Les raies situées du côté des basses fréquences sont nettes et régulièrement espacées; ce qui montre qu'il ne peut y avoir qu'une très faible différence entre les valeurs des moments d'inertie de l'état fondamental et du premier état vibratoire excité.

La partie de la bande qui s'étend vers les grandes fréquences présente des maxima d'absorption prononcés semblables à ceux que présenteraient les branches Q d'une bande de type B. La distance entre ces grands maxima est de $7,6 \text{ cm}^{-1}$ environ. La structure fine qui s'étale vers les basses fréquences peut se retrouver en utilisant la formule suivante :

$$\nu = 1128,5 - 1,58 J$$

la correspondance entre valeurs expérimentales et valeurs calculées est excellente. Le tableau XII en fait foi. Il n'est pas possible de déterminer avec certitude ν_0 en se basant uniquement sur le spectre d'absorption IR. Nous avons été guidés dans notre choix par les résultats des mesures du spectre Raman à l'état gazeux, qui donne une raie de $1128 \pm 0,5 \text{ cm}^{-1}$.

RÉGION DE 1260 cm^{-1} A 2920 cm^{-1}

Dans le bas de la planche V nous représentons deux têtes de bandes, l'une située à $1289,54\text{ cm}^{-1}$ l'autre à $1401,47\text{ cm}^{-1}$. Elles correspondent respectivement aux vibrations de déformation planes de CHD et de CH_2 .

Nous ne donnons pas de graphiques correspondant à l'absorption infra-rouge due à la vibration $\text{C}=\text{C}$; elle est située, malheureusement, dans une région pour laquelle l'absorption atmosphérique est très gênante; en tout état de cause elle aurait été très faible. Le spectre Raman du $\text{C}_2\text{H}_3\text{D}$ gazeux donne pour cette vibration la valeur 1605 cm^{-1} .

Dans les planches VI et VII nous avons reproduit quelques vibrations de combinaison caractéristiques. Nous ne les discuterons pas en détail ici.

Nous observons une bande très nette à $2072,14\text{ cm}^{-1}$, une bande à $2124,61\text{ cm}^{-1}$ et une autre encore à $2884,7\text{ cm}^{-1}$.

Nous avons pu, enfin, situer la vibration fondamentale de valence CD à $2276,11\text{ cm}^{-1}$, contre $2275,73\text{ cm}^{-1}$ valeur donnée par le spectre Raman du gaz.

RÉGION DE 2920 cm^{-1} A 3207 cm^{-1}

1. Les deux bandes $2976,40\text{ cm}^{-1}$ et $3028,17\text{ cm}^{-1}$ sont du type A. Elles doivent être interprétées comme formant un doublet de résonance Fermi.

La structure de rotation est très belle. La présence de la bande d'absorption $2988,65\text{ cm}^{-1}$ de la molécule C_2H_4 est malheureusement gênante pour l'étude de la région située dans le voisinage de cette tête de bande.

Par un hasard heureux les raies de rotation des deux bandes en question paraissent se superposer assez exactement dans la plus grande partie du spectre; ce qui permet d'observer une structure de rotation bien nette, sauf pour quelques rares raies pour lesquelles la superposition des deux bandes produit des anomalies.

Les raies de rotation peuvent être calculées avec une assez bonne approximation en utilisant les formules suivantes :

$$R(J) = 2976,20 + 1,66 (J + 1)$$

$$P(J) = 2976,20 - 1,661 J$$

et

$$R(J) = 3028,17 + 1,66 (J + 1)$$

$$P(J) = 3028,17 - 1,66 J$$

La constante 1,66 est en bon accord avec la valeur théorique $B + C = 1,659$, donnée plus haut.

2. La bande à $3061,27 \text{ cm}^{-1}$ est recouverte par une bande voisine; son centre est cependant nettement marqué. Elle correspond à la raie de valence CH du groupe CHD.

3. La vibration de valence antisymétrique CH du groupe CH_2 donne une bande de caractère B assez marqué. Nous avons pu établir deux formules également satisfaisantes pour retrouver les branches Q par le calcul. Elles sont :

$$P_q(K) = 3102,605 - 3,131 (2K - 1) - 0,016 K^2$$

$$R_q(K) = 3102,605 + 3,131 (2K - 1) - 0,016 K^2$$

$$P_q(K) = 3096,36 - 3,154 (2K - 1) - 0,016 K^2$$

$$R_q(K) = 3096,36 + 3,154 (2K - 1) - 0,016 K^2$$

Notre préférence va à la dernière parce qu'elle correspond mieux aux résultats que nous donne le spectre Raman du $\text{C}_2\text{H}_3\text{D}$ gazeux.

La région du spectre qui s'étend de 3179 cm^{-1} à 3207 cm^{-1} présente une structure fine de rotation très régulière. Les raies présentent un intervalle constant égal à 1,57, qui est légèrement plus petit que l'intervalle 1,66 utilisé pour les bandes 2976,20 et 3028,17, mais qui est le même que l'intervalle obtenu pour la bande 1128.

CONCLUSIONS

La valeur de $(B + C)$ donnée par le calcul, à savoir 1,6598, se rapproche très fort de la valeur 1,66 qui résulte de l'analyse de certaines bandes. La constance remarquable des intervalles entre les raies de rotation correspondant à des J croissants montre que la valeur de $(B + C)$ dans l'état fondamental et dans le premier état excité est sensiblement la même.

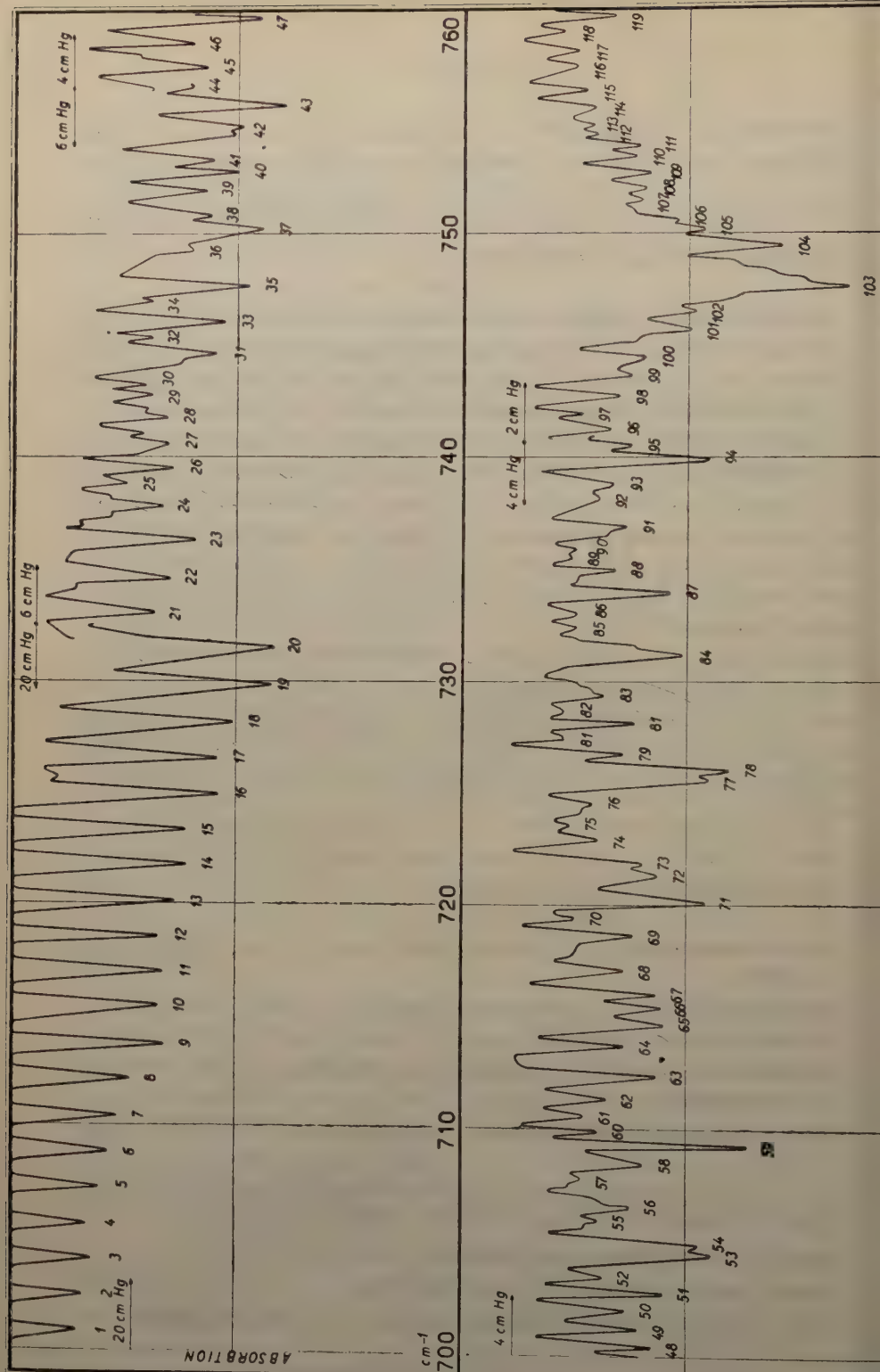
La valeur de $\left(A - \frac{B+C}{2}\right)$ pour l'état fondamental déduite de l'étude de la bande 3096,36 est 3,170; cette valeur est égale aux erreurs de mesure près à la valeur théorique 3,1694. Par contre l'étude des bandes 943,64 et 1000,15 donne respectivement pour cette

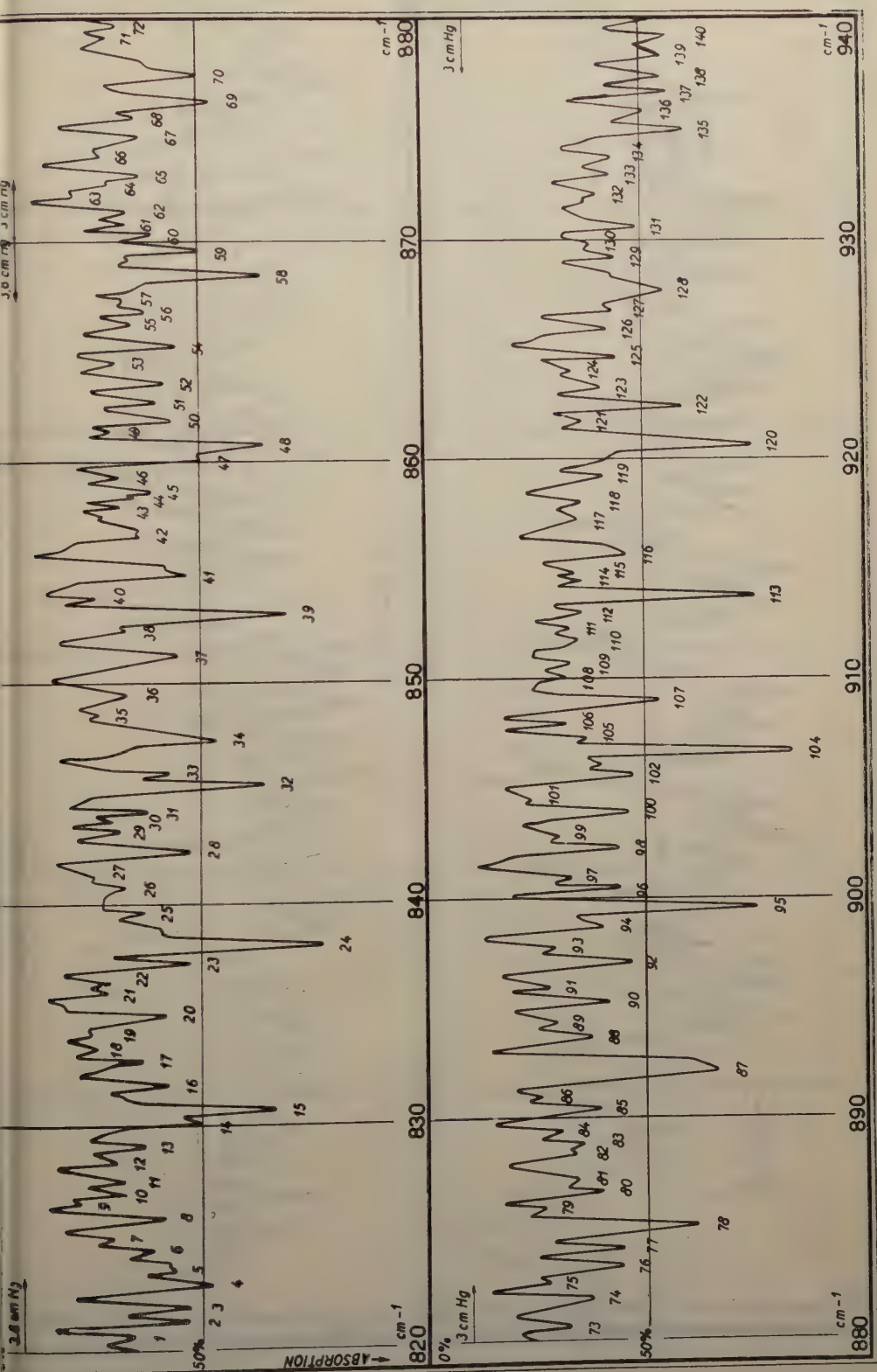
constante les valeurs 3,158 et 3,178 assez différentes de la valeur théorique, qui néglige les corrections de Coriolis et autres. De plus dans tous les cas $\left(A - \frac{B+C}{2}\right)$ a une valeur différente pour l'état fondamental et pour l'état excité.

Nous voudrions remercier chaleureusement tous ceux qui nous ont aidés au cours de ce travail. Nos remerciements vont en tout premier lieu au Professeur M. Migeotte, qui nous a autorisés à utiliser le spectrographe à réseau conçu et monté par lui et nous a aidés de façon constante pendant la prise des spectres; il nous a aussi tenus au courant des derniers résultats non publiés du National Bureau of Standards de Washington. Nous remercions aussi M. Neven qui à plusieurs reprises, pendant notre séjour au Jungfraujoch, nous a prêté main forte. Notre gratitude va également aux institutions qui nous ont aidés financièrement. Sans l'aide du Centre de chimie physique moléculaire et du F. N. R. S., ce travail n'aurait pas été possible. Nous voulons remercier tout spécialement les dirigeants de la station scientifique du Jungfraujoch et le personnel de la station qui nous ont permis de travailler et nous ont aidés dans notre travail là haut. Nous remercions enfin R. van Riet, M. Griffé, J. Remy, G. Maes qui nous ont aidés d'une façon ou de l'autre au cours de ce travail.

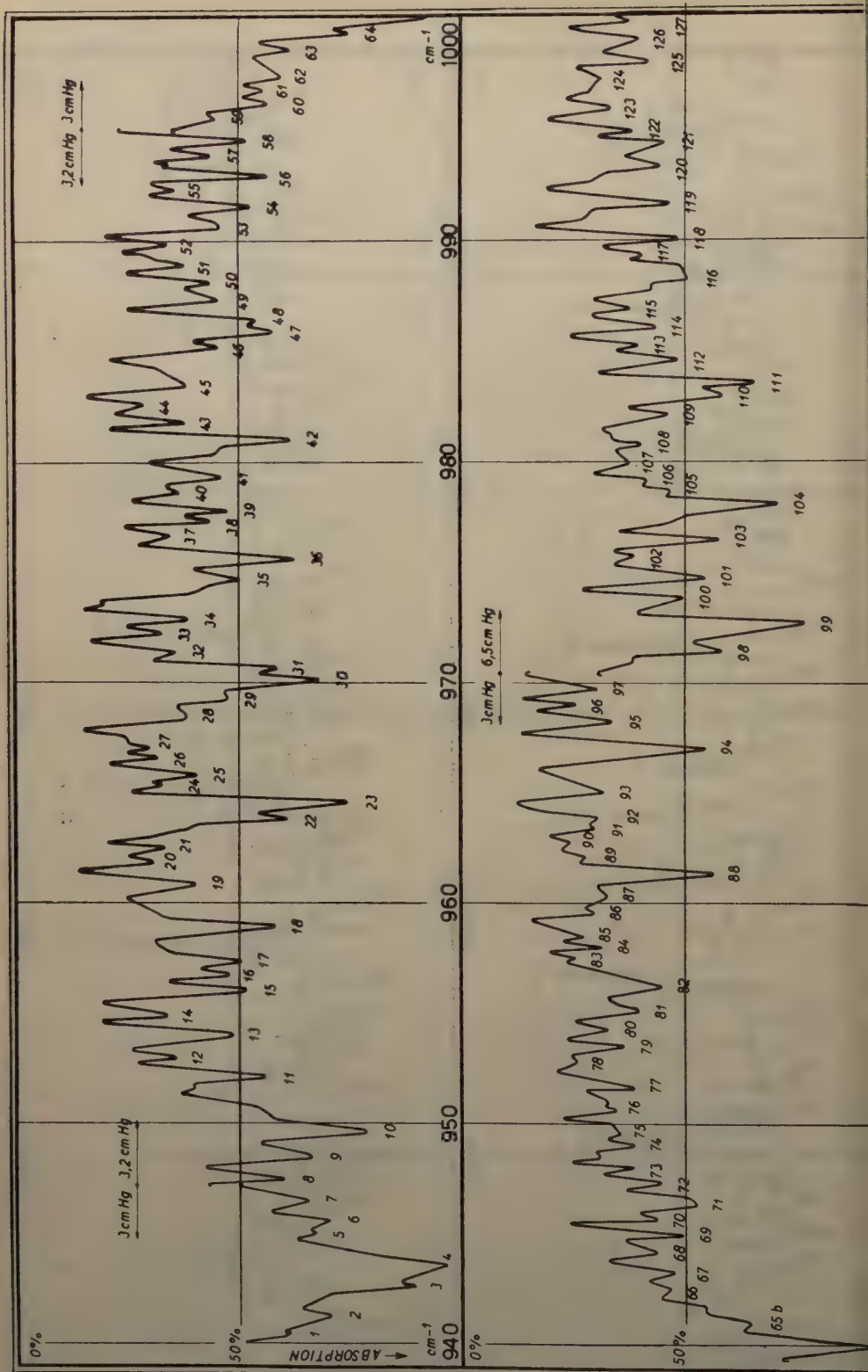
LITTÉRATURE.

- 1) M. DE HEMPTINNE et R. VAN RIET, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, XXIX, p. 79 (1943).
- 2) M. DE HEMPTINNE et C. COURTOY, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles*, série I, tome LXIII, p. 98 (1949).
- 3) C. COURTOY, M. DE HEMPTINNE et M. V. MIGEOTTE, *J. Chem. Phys.*, 19, p. 137 (1951).
- 4) J. CHARETTE et M. de HEMPTINNE, *Bull. Acad. Roy. Belg*, 8 mai, p. 436 (1951).
- 5) M. MIGEOTTE, *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*. Coll. in-4°. Première série, Tome 1 Fasc. 3 (1945).
- 6) RAO, *J. Chem. Phys.*, 18, p. 213 (1950).
- 7) H. H. NIELSEN, *Phys. Rev.*, 59, p. 565 (1941).
- 8) W. S. GALLAWAY et E. F. BARKER, *J. Chem. Phys.*, 10, p. 96 (1942).

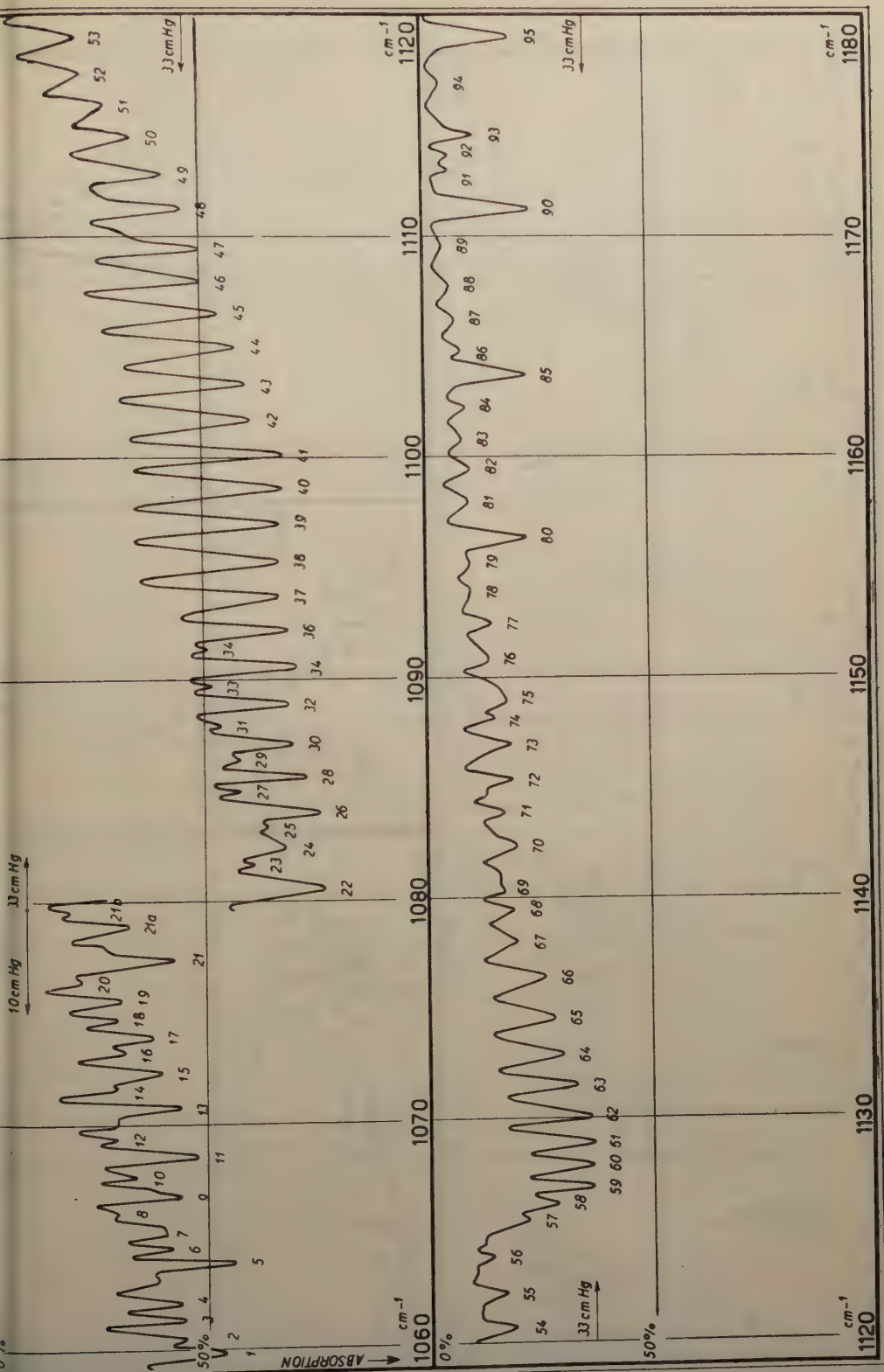




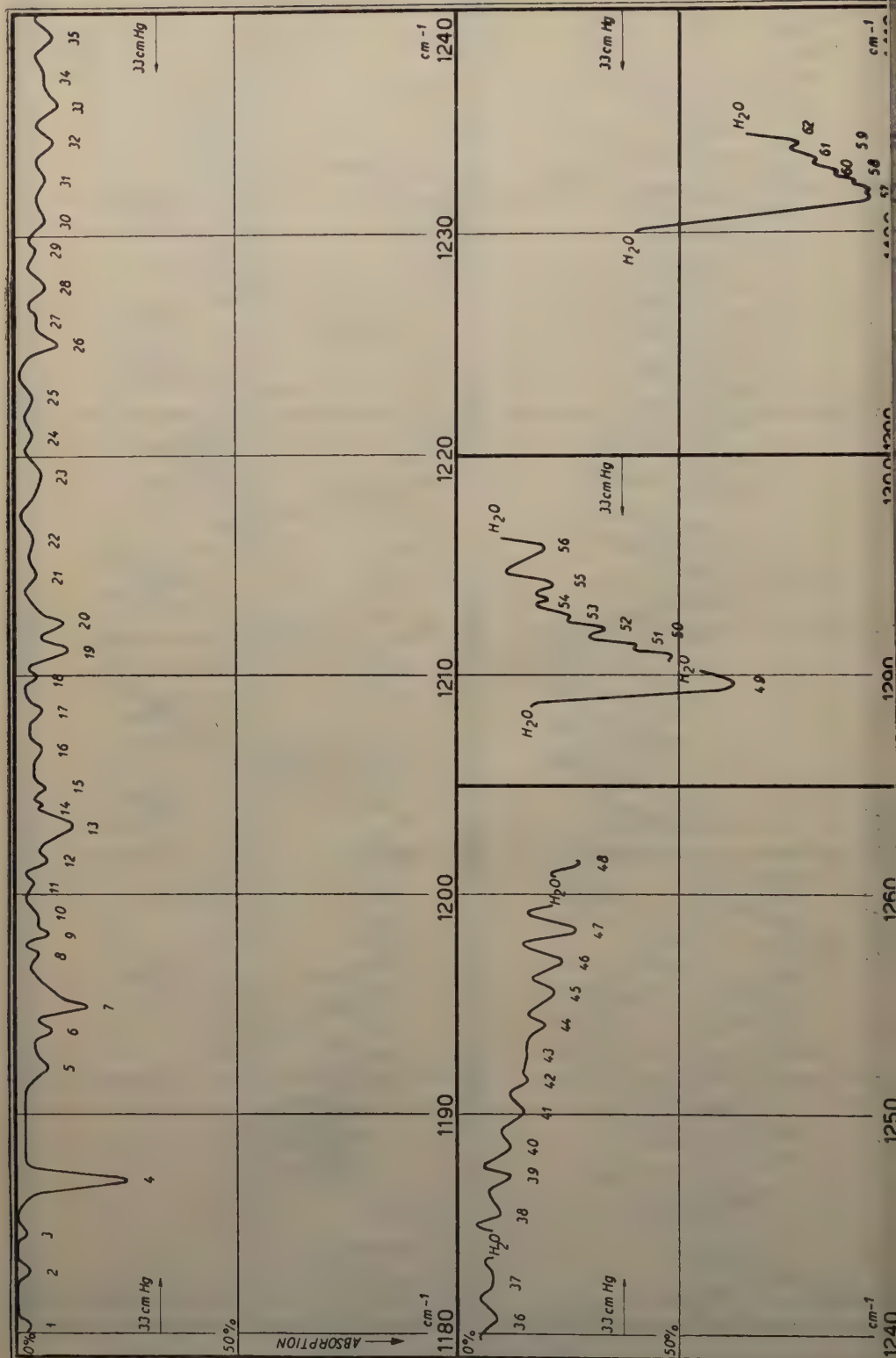
Cuve d'absorption : 15 cm



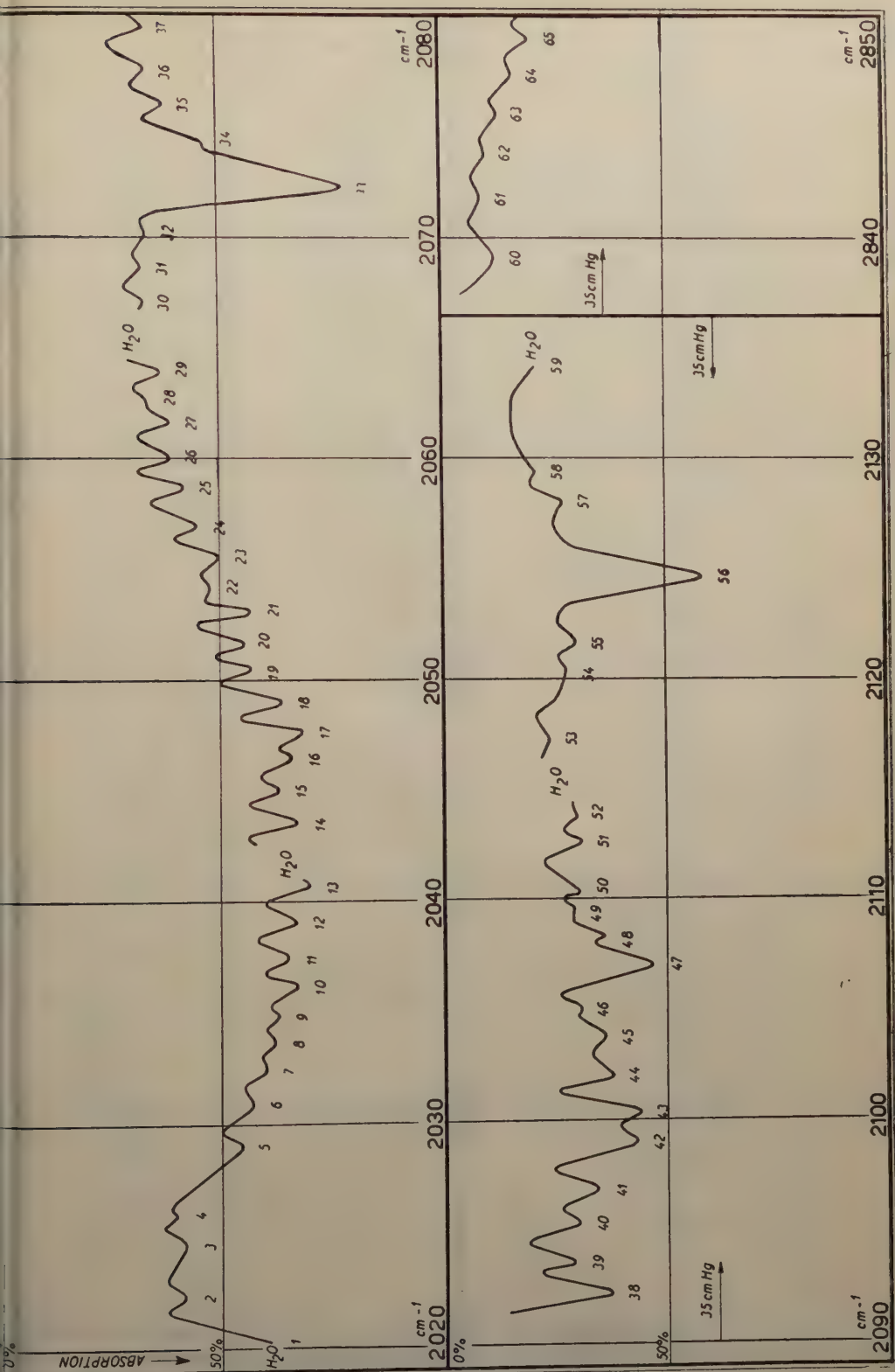
Cuve d'absorption : 15 cm



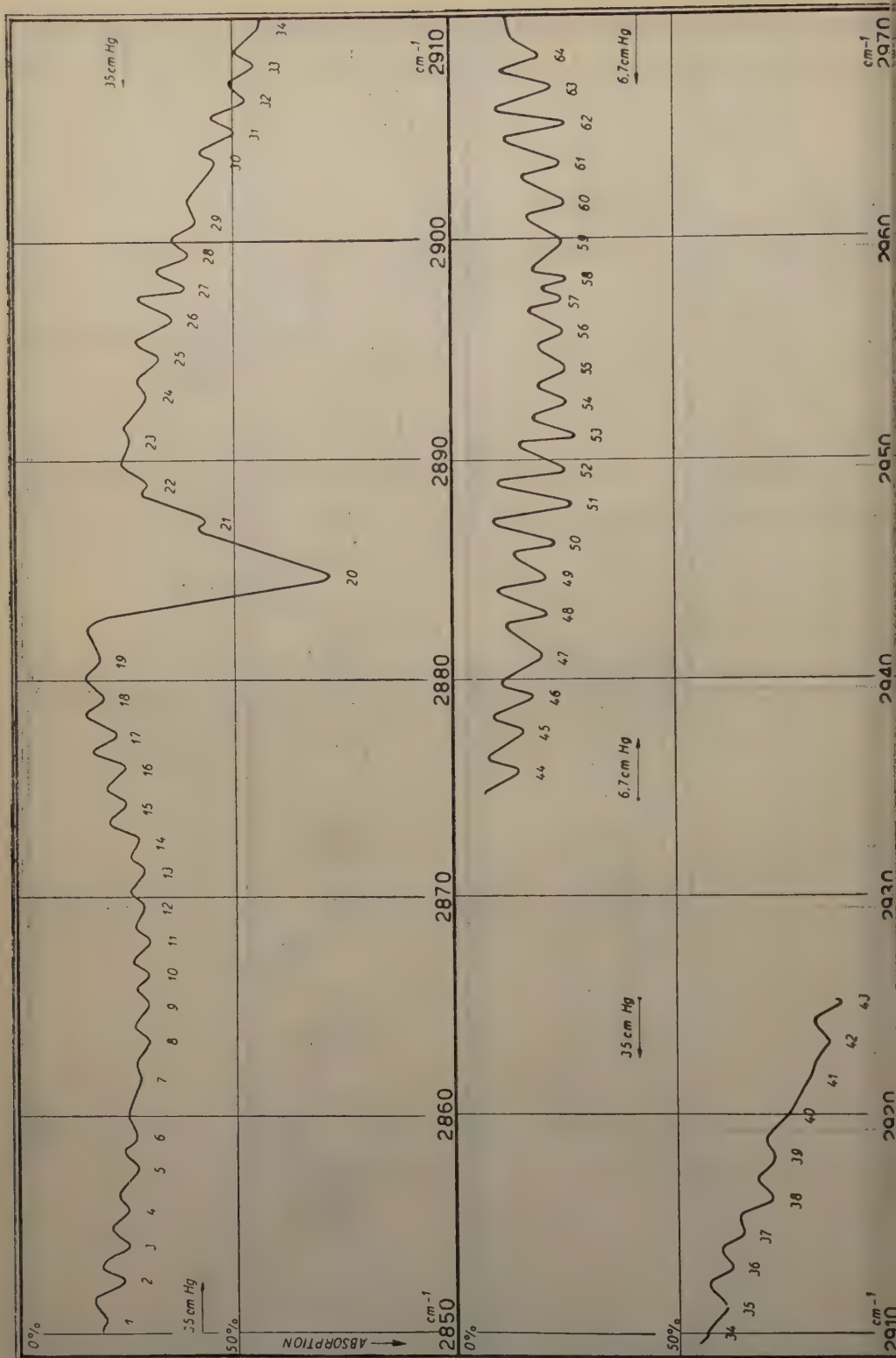
Cuve d'absorption : 15 cm



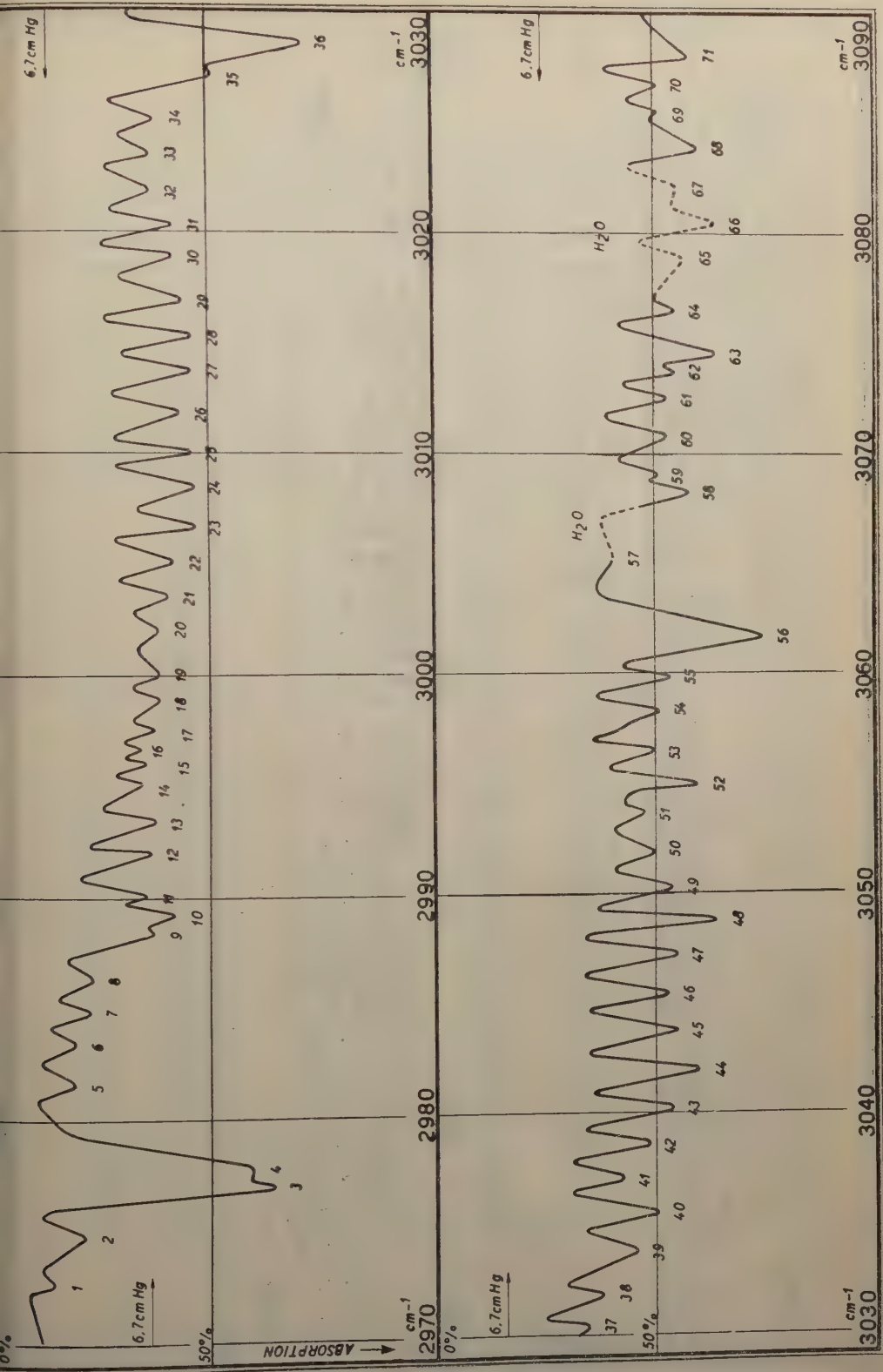
Cuve d'absorption : 15 cm



Cuve d'absorption avec parcours de 1 m



De 2850 à 2930, cuve d'absorption avec parcours de 1 m
 De 2930 à 2970, cuve de 15 cm



Cuve d'absorption de 15 cm

Cuve d'absorption de 15 cm

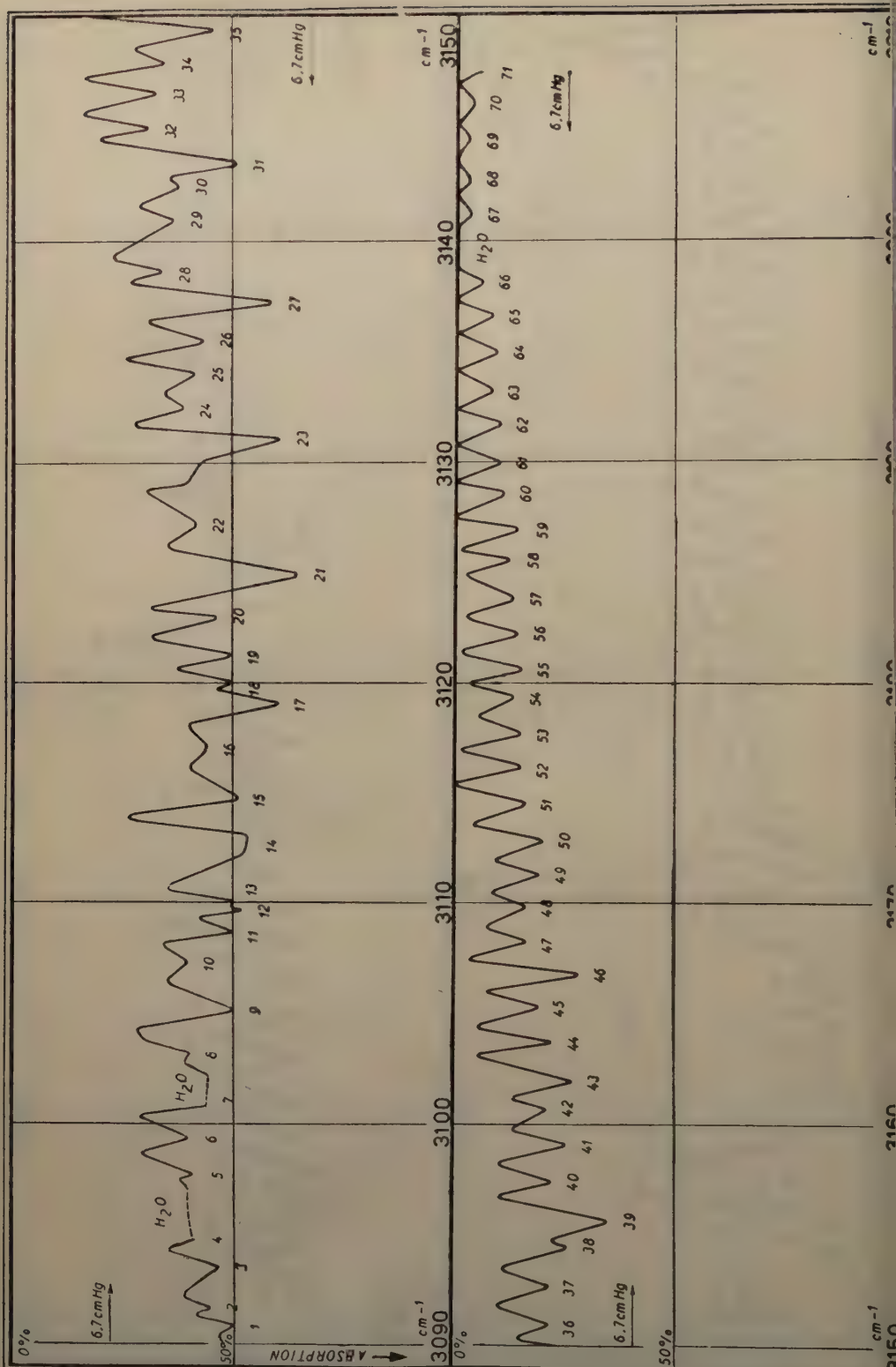


Planche I

N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide
1	700,85	29	742,72	60	769,91	88c	794,98
2	702,45	30a	743,26	61	770,61	89	795,49
3	704,08	30b	744,32	62	771,41	90	795,88
4	705,64	30c	744,45	63	772,34	91a	796,54
5	707,28	31	744,65	64	773,75	91b	796,67
6	708,84	32	745,38	65	774,73	91c	796,86
7	710,45	33	746,07	66	775,43	92	798,17
8	712,06	34	746,99	67	776,01	93	798,77
9	713,65	35	747,64	68	777,08	94	799,89
10	715,35	36	749,31	69	778,64	95	800,51
11	716,89	37	750,29	70	779,44	96	801,21
12	718,47	38	750,87	71	780,05	97	801,92
13	720,62	39	751,97	72	781,34	98	802,72
14	721,72	40	752,79	73	781,84	99	803,63
15	723,29	41	753,38	74	782,92	100	804,44
16	724,86	42a	754,45	75	782,59	101	805,66
17a	725,65	42b	754,90	76a	784,14	102	806,51
17b	726,47	43	755,69	76b	784,33	103a	807,55
18	728,12	44	756,55	76c	784,51	103b	807,82
19	729,75	45	757,52	77	785,62	103c	807,94
20	731,40	46	758,60	78	786,00	104	809,42
21a	733,08	47	759,71	79	786,73	105	810,18
21b	734,13	48	760,41	80	787,49	106	810,56
21c	734,29	49	761,18	81	788,13	107a	810,88
22	734,60	50	762,03	82	788,69	107b	811,02
23a	736,23	51	762,78	83a	789,39	107c	811,49
23b	736,92	52	763,47	83b	789,54	108	812,01
23c	737,37	53	764,44	83c	789,63	109	812,64
23d	737,54	54	764,86	83d	789,84	110	813,38
24a	737,79	55a	765,72	83e	789,96	111	813,86
24b	738,16	55b	765,78	84a	791,14	112	814,36
24c	738,26	55c	765,94	84b	791,47	113	814,80
25	738,84	56	766,59	84c	791,59	114	815,62
26	739,51	57a	767,51	85	792,41	115	816,33
27a	740,62	57b	767,72	86	793,01	116	817,33
27b	741,13	57c	767,90	87	793,86	117	818,08
28a	741,78	58	768,44	88a	794,50	118	819,00
28b	742,17	59	769,27	88b	794,71	119	819,70

Planche II

N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide
1	820,46	36	849,37	69	876,24	105	907,19
2	821,32	37	851,13	70	877,40	106	907,83
3	821,89	38	852,24	71	879,15	107	908,85
4	822,83	39	852,93	72	879,74	108	910,—
5	823,41	40	853,64	73	880,50	109	910,56
6a	823,74	41a	854,80	74	881,57	110	911,65
6b	824,31	41b	855,—	75	882,48	111	912,18
7	824,91	41c	855,14	76	883,10	112	912,87
8	825,81	42a	856,51	77	883,93	113	913,63
9	826,49	42b	856,85	78	884,90	114	914,36
10	827,—	43	857,85	79	885,70	115	914,70
11	827,46	44	858,29	80	886,49	116	915,51
12	828,40	45	858,50	81	887,06	117	917,17
13	829,—	46	859,18	82	888,23	118	917,84
14	830,07	47	860,08	83	888,64	119	919,08
15	830,61	48	860,65	84	889,20	120	920,54
16	831,76	49	861,28	85	890,20	121	921,57
17	832,78	50	861,81	86	890,80	122	922,39
18	833,44	51	862,68	87	891,99	123	923,22
19	834,02	52	863,54	88	893,50	124	923,93
20	834,94	53	864,43	89	894,14	125	924,58
21	835,92	54	865,20	90	895,07	126	925,82
22	836,36	55	866,14	91	895,86	127	926,75
23	837,18	56	866,76	92	896,94	128	927,50
24	838,04	57	867,25	93	897,58	129	929,16
25	839,50	58	868,45	94	898,64	130	929,77
26	840,65	59	869,57	95	899,43	131	930,52
27	841,07	60	870,25	96	900,34	132	931,99
28	842,21	61	870,75	97	900,80	133	932,86
29	843,15	62	871,19	98	902,09	134	933,61
30	843,62	63	872,06	99	902,71	135	934,86
31	843,98	64	872,48	100	903,77	136	935,79
32	845,26	65	872,93	101	904,35	137	936,70
33	845,77	66	873,80	102	905,46	138	937,28
34	847,21	67	874,66	103	906,—	139	938,31
35	848,44	68	875,52	104	906,60	140	939,17

Planche III

N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide
1	940,35	34	972,75	65a	999,99	96	1028,89
2	941,11	34a	973,40	65b	1000,89	97	1029,61
3	942,45	35	974,46	66	1002,41	98	1031,26
4	943,45	36	975,49	67	1003,16	99	1032,54
5	944,88	37	976,46	68	1004,11	100	1033,73
6	945,51	38	977,22	69	1004,85	101	1034,61
7	946,38	39	977,64	70	1005,65	102	1035,47
8	947,41	40	978,49	71	1006,41	103	1036,28
9	948,42	41	979,18	72	1007,29	104	1037,92
10	949,53	42	980,91	73	1007,88	105	1038,57
10a	950,58	43	981,77	73a	1008,47	106	1039,01
11	952,01	44	982,52	74	1008,95	107	1039,74
12	952,82	45	983,41	75	1009,44	108	1040,65
13	953,88	45a	984,11	76	1010,48	109	1041,98
14	954,82	46	985,08	77	1011,54	110	1042,84
15	956,01	47	985,85	78	1012,61	111	1043,45
16	956,64	48	986,36	79	1013,37	112	1044,50
17	957,19	49	987,31	80	1014,19	113	1045,14
18	958,70	50	988,10	81	1015,04	114	1046,03
19	960,68	51	988,94	82	1016,11	115	1046,86
20	961,74	52	989,83	83	1017,33	115a	1048,14
21	962,28	53	990,64	84	1017,86	116	1048,72
22	963,73	54	991,45	85	1018,36	117	1049,24
23	964,38	55	992,28	86	1019,45	118	1049,93
24	965,18	56	992,85	87	1020,18	119	1051,49
25	965,68	57	993,89	88	1021,17	120	1053,19
26	966,45	58	994,50	89	1021,94	121	1054,24
27	966,92	59	995,36	90	1022,60	122	1054,79
28	968,27	60	996,05	91	1023,24	123	1055,84
29	969,15	61	996,62	92	1023,67	124	1056,77
30	969,93	62	997,20	93	1024,87	125	1057,91
31	970,39	63	998,57	94	1026,80	126	1058,86
32	971,22	64	999,28	95	1028,11	127	1059,74
33	972,11						

Planche IV

N ^o	ν vide	N ^o	ν vide	N ^o	ν vide
1	1059,74	31	1087,83	64	1132,82
2	1060,40	32	1088,78	65	1134,55
3	1061,32	33	1089,57	66	1136,35
4	1062,02	34	1090,47	67	1138,02
5	1063,03	35	1091,24	68	1139,43
6	1063,79	36	1092,12	69	1140,22
7	1064,49	37	1093,60	70	1142,28
8	1065,13	38	1095,25	71	1143,76
9	1066,80	39	1096,91	72	1145,26
10	1067,72	40	1098,52	73	1146,93
11	1068,60	41	1100,11	74	1148,04
12	1069,35	42	1101,66	75	1148,84
12a	1070,12	43	1103,33	76	1150,77
13	1070,72	44	1104,97	77	1152,38
14	1071,60	45	1106,47	78	1153,93
15	1072,31	46	1107,94	79	1155,03
16	1073,23	47	1109,47	80	1156,29
17	1073,91	48	1111,21	81	1157,89
18	1074,66	49	1112,74	82	1159,36
19	1075,56	50	1114,37	83	1160,75
20	1076,40	51	1115,90	84	1162,17
21	1077,35	52	1117,28	85	1163,70
21a	1078,77	53	1118,91	86	1164,81
21b	1079,49	54	1120,59	87	1166,19
22	1080,47	55	1122,12	88	1167,80
23	1081,55	56	1123,77	89	1169,48
24	1082,27	57	1125,34	90	1171,22
25	1083,25	58	1126,12	91	1173,00
26	1083,91	59	1126,92	92	1173,67
27	1084,84	60	1127,81	93	1174,53
28	1085,51	61	1128,82	94	1176,93
29	1086,25	62	1130,05	95	1178,98
30	1087,01	63	1131,41		

Planche V

N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide
1	1180,27	17	1208,38	33	1235,88	49	1289,54
2	1182,71	18	1209,88	34	1237,38	50	1290,84
3	1184,49	19	1211,07	35	1238,96	51	1291,36
4	1186,93	20	1212,34	36	1240,57	52	1292,04
5	1192,03	21	1214,53	37	1242,59	53	1292,60
6	1193,67	22	1216,17	38	1245,42	54	1293,37
7	1194,82	23	1219,15	39	1247,11	55	1294,00
8	1197,18	24	1220,97	40	1248,48	56	1295,75
9	1198,13	25	1222,61	41	1250,05	57	1401,47
10	1198,87	26	1225,03	42	1251,47	58	1401,87
11	1200,45	27	1226,25	43	1252,60	59	1402,20
12	1201,43	28	1227,66	44	1253,99	60	1402,70
13	1202,99	29	1229,29	45	1255,52	61	1403,30
14	1203,95	30	1230,71	46	1256,93	62	1404,00
15	1204,69	31	1232,51	47	1258,34		
16	1206,57	32	1234,15	48	1261,41		

Planche VI

N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide	N ^o	v vide
1	2020,16	18	2048,90	35	2075,86	52	2113,65
2	2022,20	19	2050,38	36	2077,41	53	2117,09
3	2024,57	20	2051,56	37	2079,42	54	2120,34
4	2025,82	21	2052,95	38	2092,16	55	2121,69
5	2028,80	22	2054,18	39	2093,68	56	2124,61
6	2030,60	23	2055,37	40	2095,40	57	2128,00
7	2032,20	24	2056,90	41	2096,97	58	2129,31
8	2033,40	25	2058,56	42	2099,06	59	2135,02
9	2034,63	26	2059,90	43	2100,38	60	2839,05
10	2036,00	27	2061,58	44	2102,15	61	2841,83
11	2037,42	28	2062,46	45	2103,90	62	2843,75
12	2039,04	29	2063,84	46	2105,08	63	2845,52
13	2040,52	30	2067,02	47	2107,05	64	2847,24
14	2043,40	31	2068,53	48	2108,29	65	2849,03
15	2044,84	32	2070,10	49	2109,47		
16	2046,35	33	2072,14	50	2110,47		
17	2047,40	34	2074,11	51	2112,48		

Planche VII

N ^o	ν vide	N ^o	ν vide	N ^o	ν vide	N ^o	ν vide
1	2850,58	17	2877,56	33	2907,98	49	2944,07
2	2852,25	18	2879,23	34	2909,82	50	2945,78
3	2853,98	19	2880,79	35	2911,09	51	2947,51
4	2855,74	20	2884,72	36	2913,01	52	2949,06
5	2857,70	21	2887,19	37	2914,54	53	2950,65
6	2858,93	22	2889,05	38	2916,34	54	2952,24
7	2861,51	23	2890,76	39	2918,00	55	2953,69
8	2863,28	24	2892,74	40	2920,05	56	2955,29
9	2865,03	25	2894,53	41	2921,67	57	2956,85
10	2866,39	26	2896,33	42	2923,24	58	2957,71
11	2868,03	27	2897,78	43	2925,13	59	2959,47
12	2869,72	28	2899,32	44	2935,45	60	2961,18
13	2871,29	29	2900,91	45	2937,22	61	2962,90
14	2872,78	30	2903,51	46	2938,79	62	2964,73
15	2874,32	31	2904,94	47	2940,65	63	2966,38
16	2875,99	32	2906,40	48	2942,49	64	2967,80

Planche VIII

N ^o	ν vide	N ^o	ν vide	N ^o	ν vide	N ^o	ν vide
1	2972,15	19	2999,54	37	3029,94	55	3059,35
2	2974,23	20	3001,50	38	3031,31	56	3061,27
3	2976,40	21	3003,08	39	3033,28	57	3064,68
4	2977,21	22	3004,66	40	3035,02	58	3067,82
5	2981,06	23	3006,22	41	3036,62	59	3068,55
6	2982,79	24	3008,01	42	3038,16	60	3070,27
7	2984,35	25	3009,65	43	3039,68	61	3071,96
8	2985,84	26	3011,45	44	3041,47	62	3073,14
9	2987,87	27	3013,28	45	3043,20	63	3074,04
10	2988,65	28	3014,85	46	3044,93	64	3075,95
11	2989,51	29	3016,54	47	3046,61	65	3078,43
12	2991,38	30	3018,47	48	3048,20	66	3080,01
13	2992,88	31	3019,95	49	3049,66	67	3081,58
14	2994,62	32	3021,46	50	3051,42	68	3083,30
15	2995,50	33	3022,95	51	3053,17	69	3085,01
16	2996,15	34	3024,67	52	3054,47	70	3086,36
17	2996,97	35	3026,68	53	3055,97	71	3087,63
18	2998,37	36	3028,17	54	3057,68		

Planche IX

N ^o	ν vide	N ^o	ν vide	N ^o	ν vide	N ^o	ν vide
1	3090,32	19	3120,76	37	3151,10	55	3179,91
2	3091,05	20	3122,37	38	3153,88	56	3181,50
3	3092,86	21	3124,27	39	3155,06	57	3183,14
4	3094,16	22	3126,65	40	3156,79	58	3184,87
5	3097,14	23	3130,40	41	3158,55	59	3186,31
6	3098,76	24	3131,79	42	3160,03	60	3187,88
7		25	3133,41	43	3161,34	61	3189,25
8	3102,66	26	3134,91	44	3163,00	62	3191,00
9	3104,66	27	3136,64	45	3164,57	63	3192,51
10	3106,84	28	3137,97	46	3166,13	64	3194,24
11	3108,09	29	3140,33	47	3167,62	65	3195,90
12	3109,14	30	3141,79	48	3169,19	66	3197,41
13	3109,50	31	3142,83	49	3170,62	67	3200,47
14	3112,42	32	3144,42	50	3172,15	68	3202,01
15	3114,17	33	3145,98	51	3173,88	69	3203,88
16	3116,52	34	3147,44	52	3175,52	70	3205,46
17	3118,53	35	3148,80	53	3177,00	71	3206,86
18	3119,55	36	3150,40	54	3178,67		

Tableau X

Bande 943,64

K	ν calc.	N ^o	ν exp. (vide)	ν calc.	N ^o	ν exp. (vide)
1	940,49		—	952,79	11	952,01(?)
2	934,09	135	934,86	958,71	18	958,70
3	927,53	128	927,50	964,47	23	964,38
4	920,81	120	920,54	970,06	30	969,93
5	913,94	113	913,63	975,50	36	975,49
6	906,90	104	906,60	980,77	42	980,91
7	899,71	95	899,43	985,89	47	985,85
8	892,35	87	891,99	990,85		—
9	884,83	78	884,90	995,64	60	996,05
10	877,16	70	877,40			
11	869,33	59	869,57			

Tableau XI

Bande 1000,15

K	ν calc.	N°	ν exp. (vide)	ν calc.	N°	ν exp. (vide)
1	1009,41			996,97	62	997,20
2	1015,45	82	1016,11	990,55	53	990,64
3	1021,31	88	1021,17	983,99	45a	984,11
4	1027,05	94	1026,80	977,29	39	977,64
5	1032,66	99	1032,54	970,46	31	970,39
6	1038,13	104	1037,92	963,49	22	963,73
7	1043,47	111	1043,45	956,39	15	956,01
8	1048,67	116	1048,72	949,15		—
9	1053,73	121	1054,24	941,77		—
10	1058,66	125	1057,91	934,26		—
11	1063,45	6	1063,79	—		—

Tableau XII

Bande 1128,5 cm^{-1}

$\nu = 1128,5 - 1,58 J$

J	ν calc.	ν exp. (vide)	J	ν calc.	ν exp. (vide)
0			13	1107,96	1107,94
1	1126,92	1126,92	14	1106,38	1106,47
2	1125,34	1125,34	15	1104,80	1104,97
3	1123,76	1123,77	16	1103,22	1103,33
4	1122,18	1122,12	17	1101,64	1101,66
5	1120,60	1120,59	18	1100,06	1100,11
6	1119,02	1118,91	19	1098,48	1098,52
7	1117,44	1117,28	20	1096,90	1096,91
8	1115,86	1115,90	21	1095,32	1095,25
9	1114,28	1114,37	22	1093,74	1093,60
10	1112,70	1112,74	23	1092,16	1092,12
11	1111,12	1111,21	24	1090,58	1090,47
12	1109,54	1109,47			

Tableau XIII

Bande 2976,20

$\nu = 2976,20 - 1,66 J$

J	ν calc.	ν exp. (vide)	J	ν calc.	ν exp. (vide)
1	2975,54		11	2957,94	2956,85
2	2973,88	2974,23	12	2956,28	2955,29
3	2972,22	2972,15	13	2954,62	2953,69
4	2970,56	—	14	2952,96	2952,24
5	2968,90	—	15	2951,30	2950,65
6	2967,24	—	16	2949,64	2949,06
7	2964,58	2964,73	17	2947,98	2947,51
8	2962,92	2962,90	18	2946,32	2945,78
9	2961,26	2961,18	19	2944,66	2944,07
10	2959,6	2959,47	20	2943,00	2942,49

Tableau XIV

Bande 3028,17

J	P(J) calc.	N°	P(J) exp. (vide)	J	R(J) calc.	N°	R(J) exp. (vide)
0				0	3029,83	37	3029,94
1	3026,51	35	3026,68	1	3031,49	38	3031,31
2	3024,85	34	3024,67	2	3033,15	39	3033,28
3	3023,19	33	3022,95	3	3034,81	40	3035,02
4	3021,53	32	3021,46	4	3036,47	41	3036,62
5	3019,87	31	3019,95	5	3038,13	42	3038,16
6	3018,21	30	3018,47	6	3039,79	43	3039,68
7	3016,55	29	3016,54	7	3041,45	44	3041,47
8	3014,89	28	3014,85	8	3043,11	45	3043,20
9	3013,23	27	3013,28	9	3044,77	46	3044,93
10	3011,57	26	3011,45	10	3046,43	47	3046,61
11	3009,91	25	3009,65	11	3048,09	48	3048,20
12	3008,25	24	3008,01	12	3049,75	49	3049,66
13	3006,59	23	3006,22	13	3051,41	50	3051,42
14	3004,93	22	3004,66				

Tableau XV

Bande 3096,36

Pq				Rq		
K	v calc.	N°	v exp (vide)	v calc.	N°	v exp. (vide)
0	3099,51		—			
1	3093,19		—	3105,80		—
2	3086,84	71	3087,63	3112,07	14	3112,42
3	3080,55	66	3080,01	3118,29	17	3118,53
4	3074,02	63	3074,04	3124,49	21	3124,27
5	3067,57	58	3067,82	3130,65	23	3130,40
6	3061,09	56	3061,27	3136,78	27	3136,64
7	3054,58	52	3054,47	3142,89	31	3142,83
8	3048,03	48	3048,20	3148,96	35	3148,80
9	3041,44	44	3041,47	3154,99	39	3155,06
10	3034,83	40	3035,02	3160,99	43	3161,34
11	3028,19		—	3166,96	46	3166,13
12				3172,91	50	3172,15

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la première série comprend 30 volumes (1877-1891); la deuxième, 20 volumes (1892-1901); la troisième, 30 volumes (1902-1921); la quatrième, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugure la cinquième série.

La revue fut interrompue par la guerre, après la deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique).

PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien	500 francs
abonnement d'honneur	1000 francs
France et colonies françaises (s'adresser à l'Union catholique des scientifiques français, 61, rue Madame, Paris 6 ^e (Chèques postaux, Paris n° 868319)	1000 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain)	280 francs belges.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,
t. I à XXV (1875 à 1901) fr. 20,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) fr. 40,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00
Série B (sc. physiques et naturelles) " fr. 70,00
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00
(1931 à 1936) fr. 20,00
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00
(1931 à 1936) fr. 100,00
Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXV (1937 à 1951) fr. 70,00
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 70,00
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . fr. 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,
t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels fr. 200,00
Le fascicule trimestriel fr. 60,00
t. XCII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . fr. 200,00
Le fascicule fr. 40,00
t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXII (1947 à 1951) Le volume fr. 200,00
Le fascicule fr. 60,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.
t. I à L (1877 à 1901) fr. 20,00
t. LI à LXXX (1902 à 1921) fr. 20,00
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) fr. 30,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — B. Tougarinoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, 30,00 fr.
II. — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays fr. 30,00.
IV. — F. Kalsin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in 8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00. (épuisé)

MONOGRAPHIES MEDICALES

I. — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00; autres pays, fr. 90,00
III. — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I. — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages fr. 20,00
II. — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages fr. 10,00
III. — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages fr. 60,00